Teorija skupova

Prvi kolokvij, grupa A

24. studenoga 2017.

(1) (a) (1 bod) Navedite aksiom ekstenzionalnosti.
   (b) (1 bod) Što znači da je skup prebrojiv?
   (c) (1 bod) Objasnite oznaku $f^{-1}[D]$, gdje je $f : A \to B$ te $D \subseteq B$.
   (d) (1 bod) Iskažite Banachovu lemu.
   (e) (1 bod) Objasnite što znači $k(A) + k(B)$, gdje su A i B skupovi.
   (f) (1 bod) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati):
      (i) Svaki skup je ili konačan ili beskonačan.
      (ii) Postoji samo jedan skup A takav da je $k(A) = 1$.
      (iii) $\{x : x \text{ je skup i } x = x\}$ je skup.

(2) (4 boda) Dokažite da je skup svih algebarskih brojeva prebrojiv.

(3) (5 bodova) Neka su A, B i C proizvoljni skupovi.
Odredite i argumentirajte odnos između skupova

$$(A \triangle B \triangle C) \setminus (A \triangle C) \quad \text{i} \quad B \setminus (A \cup C).$$

(4) (5 bodova) Neka su R_1 i R_2 tranzitivne relacije na skupu A. Dokažite:

$$R_1 \cup R_2 \text{ je tranzitivna } \Leftrightarrow (R_1 \circ R_2) \cup (R_2 \circ R_1) \subseteq R_1 \cup R_2.$$

(5) (5 bodova) Skup $P = \{A_i : i \in I\}$ je *particija* skupa $\mathcal{A}$ ako
- $A_i \neq \emptyset$, za svaki $i \in I$,
- $A_i \cap A_j = \emptyset$, za sve $i, j \in I$, $i \neq j$,
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \mathcal{A}$.

Neka je $\mathcal{S} = \{P : P \text{ je particija od } \mathbb{Q}\}$. Odredite kardinalnost skupa $\mathcal{S}$.

(6) (5 bodova) Na skupu $\mathbb{N}$ zadana je binarna relacija $\preceq$ ovako:

$$a \preceq b \iff \text{postoji } c \in \mathbb{N} \text{ takav da je } ac = b.$$

   (a) Dokažite da je $(\mathbb{N}, \preceq)$ (refleksivni) parcijalno uređen skup.
   (b) Dokažite da svaki neprazni $A \subseteq \mathbb{N}$ ima supremum (u odnosu na $\preceq$).
   (c) Odredite $\sup\{p \in \mathbb{N} : p \text{ je prost}\}$.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1) i (2) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (3), (4), (5) i (6) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!

Teorija skupova

Prvi kolokvij, grupa B

24. studenoga 2017.

(1) (a) (1 bod) Navedite aksiom para.
(b) (1 bod) Što znači da je skup konačan?
(c) (1 bod) Objasnite oznaku $f[C]$, gdje je $f : A \to B$ te $C \subseteq A$.
(d) (1 bod) Iskažite Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem.
(e) (1 bod) Objasnite što znači $k(A) \cdot k(B)$, gdje su A i B skupovi.
(f) (1 bod) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati):
(i) Svaki skup je ili prebrojiv ili neprebrojiv.
(ii) Postoji samo jedan skup A takav da je $k(A) = 0$.
(iii) Razina V_5 kumulativne hijerarhije je konačan skup.

(2) (4 boda) Neka je A prebrojiv skup. Dokažite da je A^* (skup svih konačnih nizova elemenata iz A) prebrojiv.

(3) (5 bodova) Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Odredite i argumentirajte odnos između skupova

$$A \setminus (B \cup C) \quad \text{i} \quad (B \triangle A \triangle C) \setminus (B \triangle C).$$

(4) (5 bodova) Neka su R_1 i R_2 tranzitivne relacije na skupu A. Dokažite da je

$$(R_1 \circ R_2) \cup (R_2 \circ R_1) \subseteq R_1 \cup R_2$$

nužan i dovoljan uvjet da $R_1 \cup R_2$ bude tranzitivna.

(5) (5 bodova) Odredite kardinalnost skupa $\mathcal{T} = \{Q : Q \text{ je particija od } \mathbb{Z}\}$.
Kažemo da je skup $Q = \{B_i : i \in I\}$ *particija* skupa $\mathcal{B}$ ako

- $B_i \neq \emptyset$, za svaki $i \in I$,
- $B_i \cap B_j = \emptyset$, za sve $i, j \in I$, $i \neq j$,
- $\bigcup\limits_{i \in I} B_i = \mathcal{B}$.

(6) (5 bodova) Na skupu $\mathbb{N}$ zadana je binarna relacija $\preceq$ ovako:

$$a \preceq b \iff \text{postoji } c \in \mathbb{N} \text{ takav da je } a = bc.$$

(a) Dokažite da je $(\mathbb{N}, \preceq)$ (refleksivni) parcijalno uređen skup.
(b) Dokažite da svaki neprazni $A \subseteq \mathbb{N}$ ima infimum (u odnosu na $\preceq$).
(c) Odredite $\inf\{n \in \mathbb{N} : n \text{ je složen}\}$.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1) i (2) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (4), (5) i (6) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!