Teorija skupova

Prvi kolokvij, grupa A

20. studeni 2015.

(1) (3 boda) Definirajte sljedeće pojmove:
  (a) (1 bod) uređeni par;
  (b) (1 bod) za proizvoljni skup x definirajte $\bigcap x$;
  (c) (1 bod) ako su A i B skupovi, definirajte što znači da je $k(A) < k(B)$.

(2) (3 boda) Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:
  (a) (1 bod) aksiom izbora;
  (b) (1 bod) Cantorov teorem o kardinalnosti skupa realnih brojeva;
  (c) (1 bod) Banachova lema.

(3) (4 boda) Dokažite da za svaki $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vrijedi $\mathbb{R}^k \sim \mathbb{R}$.

(4) (5 bodova) Neka je $f\colon X \to Y$ funkcija i neka je $A \subseteq X$ proizvojan skup.
  (a) (2 boda) Dokažite $f^{-1}[f[A]] \supseteq A$.
  (b) (3 boda) Ako je f injekcija mora li vrijediti $f^{-1}[f[A]] = A$?

(5) (5 bodova) Neka je R relacija na skupu $\mathbb{C}$, takva da je $(a, b) \in R$ ako i samo ako je $a - b \in \{1, 2015\}$. Odredite

$$Q = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^{2k+1}.$$

Neka je $a \in \mathbb{Z}$ proizvoljan. Kolika je kardinalnost skupa $\{b \in \mathbb{N} : (a, b) \in Q\}$?

(6) (5 bodova) *Naljepnica* je skup svih točaka u ravnini koje se nalaze na rubu ili u unutrašnjosti nekog pravokutnika čije stranice su paralelne s koordinatnim osima. Koliko najviše naljepnica možemo smjestiti u ravninu ako one međusobno
  (a) (2 boda) ne moraju biti disjunktne,
  (b) (3 boda) moraju biti disjunktne?

(7) (5 bodova) Neka su $(X, \leq_1)$ i $(Y, \leq_2)$ slični parcijalno uređeni skupovi. Dokažite ili opovrgnite da tada svaki odozgo omeđen skup u X ima supremum ako i samo ako svaki odozgo omeđen skup u Y ima supremum.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1), (2) i (3) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (4), (5), (6) i (7) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!

Teorija skupova

Prvi kolokvij, grupa B

20. studeni 2015.

(1) (3 boda) Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) uređena n–torka;
   (b) (1 bod) familija skupova;
   (c) (1 bod) ako su A i B skupovi, definirajte što znači da je $k(A) \leq k(B)$.

(2) (3 boda) Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:
   (a) (1 bod) aksiom para;
   (b) (1 bod) aksiom izbora;
   (c) (1 bod) teorem o karakterizaciji beskonačnih skupova.

(3) (4 boda) Dokažite Knaster–Tarskijev teorem.

(4) (5 bodova) Neka je $f\colon X \to Y$ funkcija i neka je $B \subseteq Y$ proizvoljan skup.
   (a) (2 boda) Dokažite $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$.
   (b) (3 boda) Ako je f surjekcija mora li vrijediti $f[f^{-1}[B]] = B$?

(5) (5 bodova) Neka je Q relacija na skupu $\mathbb{R}$, takva da je $(a, b) \in Q$ ako i samo ako je $b - a = 1$ ili $b - a = 2015$. Odredite

$$R = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} Q^{2k}.$$

Neka je $b \in \mathbb{Z}$ proizvoljan. Kolika je kardinalnost skupa $\{a \in \mathbb{N} : (a, b) \in R\}$?

(6) (5 bodova) Skup svih točaka u ravnini koje se nalaze na rubu ili u unutrašnjosti nekog kruga nazivamo *pečat*. Kolika je najveća moguća kardinalnost nekog skupa pečata u ravnini ako se taj skup sastoji od međusobno
   (a) (3 boda) disjunktnih pečata,
   (b) (2 boda) ne nužno disjunktnih pečata?

(7) (5 bodova) Neka su $(X, \leq_1)$ i $(Y, \leq_2)$ slični parcijalno uređeni skupovi. Dokažite ili opovrgnite da tada svaki odozdo omeđen skup u X ima infimum ako i samo ako svaki odozdo omeđen skup u Y ima infimum.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1), (2) i (3) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (4), (5), (6) i (7) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!