Teorija skupova

Prvi kolokvij, grupa A

17. studeni 2014.

(1) Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) $\bigcup x$, ako je x neki skup;
   (b) (1 bod) indeksirana familija skupova;
   (c) (1 bod) najveći i maksimalni element u parcijalno uređenom skupu.

(2) Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:
   (a) (1 bod) aksiom partitivnog skupa;
   (b) (1 bod) shema aksioma separacije;
   (c) (1 bod) Knaster, Tarskijev teorem o fiksnoj točki.

(3) (4 boda) Dokažite da su svi omeđeni interavali skupa $\mathbb{R}$ međusobno ekvipotentni.

(4) (5 boda) Za $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ označimo $K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, te $K = \{z \in \mathbb{C} \mid (\exists n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})(z^n = 1)\}$. Ispitajte odnos (inkluzije dokažite, ili opovrgnite kontraprimjerima) između skupova

$$K \qquad \text{i} \qquad \bigcap_{i\in\mathbb{N}\backslash\{0\}} \bigcup_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ j\geq i}} K_j \, .$$

(5) (5 boda) Neka su R i S relacije ekvivalencije na skupu A, tako da je $R \circ S = S \circ R$. Je li $R \circ S$ relacija ekvivalencije?

(6) (5 boda) Koliko ima podskupova od $\mathbb{R}$ koji nisu ni otvoreni ni zatvoreni i disjunktni su sa $\mathbb{Z}$?

(7) (5 boda) Neka je V konačno dimenzionalan, realan vektorski prostor, te f netrivijalan funkcional. Definiramo uređaj $v <_f w$ ako je $f(v) < f(w)$, gdje su $v, w \in V$. Je li $(V, <_f)$ PUS? Ako da, može li se konstruirati sličnost s analogno definiranim uređenim skupom $(V, <_g)$, gdje je g neki drugi funkcional?

Teorija skupova

Prvi kolokvij, grupa B

17. studeni 2014.

(1) Definirajte sljedeće pojmove:
  (a) (1 bod) $\bigcup x$, ako je x neki skup;
  (b) (1 bod) indeksirana familija skupova;
  (c) (1 bod) najveći i maksimalni element u parcijalno uređenom skupu.

(2) Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:
  (a) (1 bod) aksiom partitivnog skupa;
  (b) (1 bod) shema aksioma separacije;
  (c) (1 bod) Knaster, Tarskijev teorem o fiksnoj točki.

(3) (4 boda) Dokažite da su svi omeđeni interavali skupa $\mathbb{R}$ međusobno ekvipotentni.

(4) (5 boda) Za $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ označimo $K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, te $K = \{z \in \mathbb{C} \mid (\exists n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})(z^n = 1)\}$. Ispitajte odnos (inkluzije dokažite, ili opovrgnite kontraprimjerima) između skupova

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}\backslash\{0\}} \bigcap_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ j>i}} K_j \qquad \text{i} \qquad K$$

(5) (5 boda) Neka su R i S relacije ekvivalencije na skupu A. Je li $R \cap S$ relacija ekvivalencije na A?

(6) (5 boda) Koliko ima funkcija sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koje imaju prekid u svakoj točki.

(7) (5 boda) Na skupu S, svih funkcija sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ definiramo uređaj $f <_3 g$ ako $f(3) < g(3)$, $f, g \in S$. Je li $(S, <_3)$ PUS? Ako da, može li se konstruirati sličnost s analogno definiranim uređenim skupom $(S, <_5)$.