

Teorija skupova

Prvi kolokvij

9. studeni 2012.

TEORIJSKA PITANJA

- (1) Definirajte sljedeće pojmove:
 - (1 bod) indeksirana familija skupova
 - (1 bod) ako su A i B skupovi, definirajte što znači da je $k(A)$ manje od $k(B)$
 - (1 bod) relacija parcijalnog uređaja
- (2) Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:
 - (1 bod) aksiom unije
 - (1 bod) teorem o karakterizaciji beskonačnih skupova
 - (1 bod) Banachova lema.
- (3) (4 boda) Dokažite da vrijedi $\mathbb{R} \not\approx^{\mathbb{R}} \mathbb{R}$.

ZADACI

- (1) Neka je $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ familija skupova. Ispitajte odnos (inkluzije dokažite, ili opovrgnite kontraprimjerima) između skupova

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j > i}} A_j \quad \text{i} \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcap_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \geq i}} A_j .$$

- (2) Mora li tranzitivno zatvorenje antisimetrične relacije biti također antisimetrična relacija? Svoje tvrdnje dokažite.

- (3) Odredite kardinalnost skupa

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) (f(x) - x \in \mathbb{N})\} .$$

- (4) Postoji li prebrojiva familija parcijalno uređenih skupova (u parovima ne-sličnih) od kojih svaki ima točno 2^c maksimalnih elemenata, a nema minimalnih elemenata?

Dokažite da ne postoji, ili precizno opišite jednu takvu (simbolički zapišite skupove i relacije uređaja).

- (5) Na skupu K svih konačnih podskupova od \mathbb{N} definiramo uređaje

$$A \prec B : \iff \max(A \Delta B) \in B$$

$$A \sqsubset B : \iff \min(A \Delta B) \in B$$

Koji su od totalno uređenih skupova $(\mathbb{N}, <)$, (K, \prec) , (K, \sqsubset) slični a koji nisu? Obrazložite.