Teorija skupova

PRVI KOLOKVIJ

18. travnja 2012.

Teorija

1. (1 bod) Definirajte pojam particije skupa.
2. (1 bod) Definirajte pojam prebrojivog skupa.
3. (1 bod) Definirajte $k(A) \cdot k(B)$, ako su A i B skupovi.
4. (1 bod) Iskažite aksiom ekstenzionalnosti.
5. (1 bod) Iskažite aksiom para.
6. (1 bod) Iskažite Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem.
7. (4 boda) Dokažite da je skup racionalnih brojeva prebrojiv.

Zadaci

1. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Odredite odnos skupova

$$(A \cup C) \triangle B \quad \text{i} \quad (A \triangle B) \cup C\,.$$

   Inkluzije dokažite, odnosno opovrgnite kontraprimjerima.

2. Neka je ρ antisimetrična irefleksivna relacija, i ρ^t njeno tranzitivno zatvorenje. Dokažite ili opovrgnite: ako je ρ^t refleksivna relacija, tada je nužno i simetrična.
3. Dokažite da je kardinalnost skupa nizova realnih brojeva kojima je slika skup svih parnih prirodnih brojeva jednaka $\mathfrak{c}$.
4. Odredite kardinalnost skupa funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f'(x) = f''(x) = 0$.
5. Na skupu $\mathbb{Z}$ definirajmo relaciju $\preceq$ sa

$$a \preceq b \quad \text{ako i samo ako} \quad 0 \leqslant a \leqslant b \quad \text{ili} \quad b \leqslant a < 0 \quad \text{ili} \quad a < 0 \leqslant b\,.$$

   (a) Postoji li najmanji element u parcijalno uređenom skupu $(\mathbb{Z}, \preceq)$? Ako postoji, odredite ga.
   (b) Neka je $\mathbb{Z}_- = \{a \in \mathbb{Z} \mid a < 0\}$. Ispitajte ima li skup $\mathbb{Z}_-$ infimum i supremum u $(\mathbb{Z}, \preceq)$ te ako ima, odredite ih.

Teorija skupova

PRVI KOLOKVIJ

18. travnja 2012.

Teorija

1. (1 bod) Definirajte pojam familije skupova.
2. (1 bod) Definirajte pojam neprebrojivog skupa.
3. (1 bod) Definirajte $k(A)^{k(B)}$, ako su A i B skupovi.
4. (1 bod) Iskažite aksiom praznog skupa.
5. (1 bod) Iskažite shemu aksioma separacije.
6. (1 bod) Iskažite Knaster, Tarskijev teorem o fiksnoj točki
7. (4 boda) Dokažite da vrijedi $\langle 0,1\rangle \sim [0,1]$.

Zadaci

1. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Odredite odnos skupova

$$(A\cap B)\triangle C \quad \text{i} \quad (A\triangle C)\cap B\,.$$

Inkluzije dokažite, odnosno opovrgnite kontraprimjerima.

2. Neka je ρ antisimetrična irefleksivna relacija, i ρ^t njeno tranzitivno zatvorenje. Dokažite ili opovrgnite: ako je ρ^t refleksivna relacija, tada je nužno i simetrična.
3. Dokažite da je kardinalnost skupa nizova realnih brojeva kojima je slika skup svih neparnih cijelih brojeva jednaka $\mathfrak{c}$.
4. Odredite kardinalnost skupa funkcija $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ za koje postoje $a,b\in\mathbb{R}$ takvi da je $a<b$ i vrijedi $\int_a^b f(x)dx = f(b)-f(a)$.
5. Neka je $\mathcal{K}$ familija konačnih podskupova od $\mathbb{N}$. Odredite (ako postoje) najmanji i najveći element te sve minimalne i maksimalne elemente u parcijalno uređenom skupu:
   (a) $(\mathcal{K},\subseteq)$
   (b) $(\mathcal{K}\setminus\{\emptyset\},\subseteq)$.