Teorija skupova - prvi kolokvij **05. 04. 2011.**

Teorija:

1. Iskažite aksiom unije.
2. Iskažite propoziciju pomoću koje se definira Kartezijev produkt dva skupa.
3. Za skup x definirajte $\bigcap x$.
4. Definirajte konačan i beskonačan skup.
5. Iskažite aksiom izbora.
6. Definirajte potenciranje kardinalnosti, tj. za skupove A i B definirajte $k(A)^{k(B)}$.
7. Dokažite da za svaki skup A vrijedi: $k(P(A)) = 2^{k(A)}$. (Obrazložite pojedinosti dokaza).

Zadaci:

1. Ispitajte odnos među skupovima

$$((A \cap B) \setminus C) \cup ((B \cap C) \setminus A) \cup (C \setminus (A \cup B)) \quad \text{i} \quad C \triangle (A \cap B).$$

2. (i) Ako je R refleksivna relacija na skupu A, mora li onda vrijediti da je $R \subseteq R \circ R$?

   (ii) Nađite primjer relacije R na $\mathbb{N}$ takve da je $R \cap I_{\mathbb{N}} = \emptyset$ i $R \cup I_{\mathbb{N}} \subseteq R \circ R$. (Ovdje $I_{\mathbb{N}}$ označava dijagonalu skupa $\mathbb{N}$, tj. skup $\{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.)

3. Neka je A skup i $f : A \to A$ injekcija. Dokažite da je funkcija $g : A^A \to A^A$, zadana pravilom $g(h) := h \circ f$, surjekcija.

4. Dokažite da je kardinalnost skupa svih nizova kompleksnih brojeva koji ne poprimaju realne vrijednosti jednaka $\mathfrak{c}$. Svoje tvrdnje detaljno dokažite.

5. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f'(0) = 0 \quad \text{i} \quad \int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{3}.$$

Teorija skupova - prvi kolokvij **05. 04. 2011.**

Teorija:

1. Iskažite aksiom partitivnog skupa.
2. Definirajte uređeni par i uređenu n-torku.
3. Iskažite shemu aksioma separacije.
4. Ako su A i B skupovi, definirajte što znači da je $k(A) < k(B)$.
5. Definirajte zbrajanje kardinalnosti, tj. za skupove A i B definirajte $k(A) + k(B)$.
6. Iskažite Banachovu lemu.
7. Neka su A, B, C skupovi i a, b, c redom njihove kardinalnosti. Dokažite da vrijedi:

$$a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c.$$

   (Obrazložite pojedinosti dokaza).

Zadaci:

1. Ispitajte odnos među skupovima

$$((A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C) \quad \text{i} \quad ((A \triangle B) \cap (A \triangle C)) \setminus A.$$

2. (i) Ako je R relacija na skupu A takva da je $R \circ R = \emptyset$, mora li onda vrijediti da je $R \cap I_A = \emptyset$? (Sa I_A označavamo dijagonalu skupa A, tj. skup $\{(x, x) \mid x \in A\}$.)

   (ii) Nađite primjer relacije R na skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ takve da je $R \cap I_A = \emptyset$ i $R \circ R = I_A$. Može li se relacija s ovim svojstvima naći na skupu $A = \{1, 2, 3\}$?

3. Neka je A skup i $f : A \to A$ surjekcija. Dokažite da je funkcija $g : A^A \to A^A$, zadana pravilom $g(h) := h \circ f$, injekcija.

4. Dokažite da je kardinalnost skupa svih nizova realnih brojeva koji poprimaju samo iracionalne vrijednosti jednaka $\mathfrak{c}$. Svoje tvrdnje detaljno dokažite.

5. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f'(0) = 0 \quad \text{i} \quad \int_{-1}^{0} f(x)dx = -\pi\,.$$