Teorija skupova

PRVI KOLOKVIJ

14. travnja 2010.

Napomene:

- Zadatke 1, 2 i 3 pišite na *jednom* papiru.
- Zadatke 4, 5, 6, 7 i 8 pišite svaki na svom papiru.

1. Definirajte sljedeće pojmove:

[1] (a) prebrojiv skup,

[1] (b) particija skupa,

[1] (c) $k(A)^{k(B)}$, gdje su A i B proizvoljni skupovi.

2. Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:

[1] (a) aksiom praznog skupa;

[1] (b) Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem;

[1] (c) Banachova lema.

[4] 3. Neka je A neprebrojiv skup, te $B \subseteq A$ konačan. Dokažite da tada vrijedi $A \setminus B \sim A$.

[4] 4. Odredite odnos između skupova

$$(A \cup C) \bigtriangleup (B \cup C) \qquad \text{i} \qquad (A \bigtriangleup B) \cup C\,.$$

[4] 5. Neka je A skup, $\rho\colon A \to A$ funkcija i neka je $R = \{(x, \rho(x)) \mid x \in A\}$. Dokažite da vrijedi $R \circ R^{-1} \subseteq I_A$, pri čemu je $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$. Pokažite da jednakost ne mora vrijediti.

[4] 6. Dokažite da je kardinalnost skupa svih singularnih matrica nad $\mathbb{R}$ kojima nijedan član nije 0 jednaka $\mathfrak{c}$. Svoje tvrdnje detaljno obrazložite. (Matrica A je singularna ako je $\det A = 0$.)

[4] 7. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ koje su neprekidne u -101.

[4] 8. Neka je $\prec$ parcijalni uređaj na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiran sa

$$(a, b) \prec (c, d) := a + b < c + d\,.$$

Neka je $S = \{(x, 0) \mid x \in [0, 1]\} \cup \{(0, x) \mid x \in [0, 1]\}$. Ispitajte ima li skup S supremum u $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \prec)$ te, ako ima, odredite ga.

Rezultati i uvid u zadaće: ponedjeljak, 19. travnja 2010. u ???? sati.

Teorija skupova

PRVI KOLOKVIJ

14. travnja 2010.

Napomene:

- Zadatke 1, 2 i 3 pišite na *jednom* papiru.
- Zadatke 4, 5, 6, 7 i 8 pišite svaki na svom papiru.

1. Definirajte sljedeće pojmove:

[1] (a) neprebrojiv skup,

[1] (b) indeksirana familija skupova,

[1] (c) $k(A) + k(B)$, gdje su A i B skupovi.

2. Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:

[1] (a) aksiom unije;

[1] (b) aksiom para;

[1] (c) Knaster, Tarskijev teorem o fiksnoj točki.

[4] 3. Neka je A neprebrojiv skup, te $B \subseteq A$ prebrojiv. Dokažite da tada vrijedi $A \setminus B \sim A$.

[4] 4. Odredite odnos između skupova

$$(A \cup (B \setminus C)) \triangle (C \cup A) \qquad \text{i} \qquad (B \cap C) \setminus A\,.$$

[4] 5. Neka je A skup, $\rho\colon A \to A$ funkcija i neka je $R = \{(x, \rho(x)) \mid x \in A\}$. Dokažite da vrijedi $I_A \subseteq R^{-1} \circ R$, pri čemu je $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$. Pokažite da jednakost ne mora vrijediti.

[4] 6. Dokažite da je kardinalnost skupa svih regularnih matrica nad $\mathbb{R}$ kojima nijedan član nije 0 jednaka $\mathfrak{c}$. Svoje tvrdnje detaljno obrazložite. (Matrica A je regularna ako je $\det A \neq 0$.)

[4] 7. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \langle -\infty, 0\rangle$ koje imaju prekid u 505.

[4] 8. Neka je $\prec$ parcijalni uređaj na $\mathbb{R}$ definiran sa

$$x \prec y :\Leftrightarrow x^2 < y^2\,.$$

Ispitajte ima li skup $[-2, -1] \cup [1, 2]$ infimum u $(\mathbb{R}, \prec)$ te, ako ima, odredite ga.

Rezultati i uvid u zadaće: ponedjeljak, 19. travnja 2010. u ???? sati.