Teorija skupova – prvi kolokvij, 29. travnja 2009.

Ime i prezime: ______________________ JMBAG: ______________

1. Definirajte sljedeće pojmove:

[1] (a) uređeni par

[1] (b) konačan i beskonačan skup

[1] (c) najveći i maksimalni element u parcijalno uređenom skupu

2. Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:

[1] (a) aksiom ekstenzionalnosti

[1] (b) torem o karakterizaciji beskonačnih skupova

[1] (c) Knaster-Tarskijev teorem

[4] 3. Dokažite da svaka relacija ekvivalencije definira jednu particiju.

[5] 4. Neka su a, b i c skupovi. Odredite odnos među skupovima

$$(a \cap c) \vartriangle (b \cap c) \qquad \text{i} \qquad c \setminus (a \cap b)\,.$$

[5] 5. Neka je $R \subseteq A \times B$ tranzitivna i antisimetrična relacija. Definirajmo relaciju $Q \subseteq A \times B$ pomoću

$$xQy :\Longleftrightarrow xRy \wedge x \neq y\ .$$

Dokažite da je Q također tranzitivna i antisimetrična relacija.

[5] 6. Neka su a i b skupovi takvi da je $a \neq \emptyset$ i postoji injekcija s a u b. Dokažite da tada postoji surjekcija s b na a. Da li je pretpostavka $a \neq \emptyset$ nužna? Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

[5] 7. Dokažite da je kardinalnost skupa svih konvergentnih redova realnih brojeva kojima je niz parcijalnih suma strogo rastući jednaka $\mathfrak{c}$. Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

[5] 8. Odredite kardinalnost skupa svih periodičkih surjekcijâ sa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$.

Napomene:

- Rješenja zadataka predajete na tri hrpe – $\{1,2,3\}$, $\{4,6,7\}$ i $\{5,8\}$. Rješenja zadataka unutar jedne hrpe ne moraju biti pisana na posebnim papirima. Ovaj papir predajete zajedno s rješenjima. Prilikom predaje zadataka pazite na grupu.
- U uglatim zagradama nalazi se broj bodova koje nosi pojedini zadatak ili podzadatak.
- Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.
- Mobiteli nisu dopušteni niti kao zamjena za sat. Molimo da ih ugasite i pospremite.
- U zadacima u kojima se traži detaljno obrazlaganje tvrdnji posebno obratite pozornost da ako tvrdite da je $f\colon X \to Y$ surjekcija/injekcija, osim surjektivnosti/injektivnosti, obavezno dokažete da f je funkcija s domenom X i da joj slika je podskup od Y.
- Prilikom rješavanja zadataka 7. i 8. bez dokaza se smijete pozvati na teoreme navedene na predavanjima i vježbama, no ne i na primjere zadataka riješene na vježbama. Ukoliko ste u nedoumici smijete li nešto koristiti ili ne, pitajte nekog od prisutnih asistenata ili profesora.

Rezultati i uvid u zadaće:

Teorija skupova – prvi kolokvij, 29. travnja 2009.

Ime i prezime: ______________________ JMBAG: ______________

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   [1] (a) familija skupova,
   [1] (b) ekvipotentni skupovi,
   [1] (c) najmanji i minimalni element u parcijalno uređenom skupu.
2. Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:
   [1] (a) aksiom partitivnog skupa,
   [1] (b) Banachova lema,
   [1] (c) osnovni Cantorov teorem teorije skupova o kardinalnosti skupa i pripadnog partitivnog skupa.
3. [4] Dokažite da vrijedi $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.
4. [5] Neka su a, b i c skupovi. Odredite odnos među skupovima
$$a \setminus (b \cap c) \qquad \text{i} \qquad (b \cap a) \triangle (c \cap a)\,.$$
5. [5] Neka je $R \subseteq A \times B$ tranzitivna i antisimetrična relacija. Definirajmo relaciju $Q \subseteq A \times B$ pomoću
$$xQy :\Longleftrightarrow xRy \vee x = y\ .$$
Dokažite da je Q također tranzitivna i antisimetrična relacija.
6. [5] Neka su a i b skupovi takvi da postoji surjekcija s b na a. Dokažite da tada postoji injekcija s a u b. Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.
7. [5] Dokažite da je kardinalnost skupa svih nizova racionalnih brojeva kojima je skup prirodnih brojeva podskup slike jednaka $\mathfrak{c}$. Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.
8. [5] Odredite kardinalnost skupa svih periodičkih surjekcijâ sa $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{Q}$.

Napomene:

- Rješenja zadataka predajete na tri hrpe – $\{1,2,3\}$, $\{4,6,7\}$ i $\{5,8\}$. Rješenja zadataka unutar jedne hrpe ne moraju biti pisana na posebnim papirima. Ovaj papir predajete zajedno s rješenjima. Prilikom predaje zadataka pazite na grupu.
- U uglatim zagradama nalazi se broj bodova koje nosi pojedini zadatak ili podzadatak.
- Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.
- Mobiteli nisu dopušteni niti kao zamjena za sat. Molimo da ih ugasite i pospremite.
- U zadacima u kojima se traži detaljno obrazlaganje tvrdnji posebno obratite pozornost da ako tvrdite da je $f\colon X \to Y$ surjekcija/injekcija, osim surjektivnosti/injektivnosti, obavezno dokažete da f je funkcija s domenom X i da joj slika je podskup od Y.
- Prilikom rješavanja zadataka 7. i 8. bez dokaza se smijete pozvati na teoreme navedene na predavanjima i vježbama, no ne i na primjere zadataka riješene na vježbama. Ukoliko ste u nedoumici smijete li nešto koristiti ili ne, pitajte nekog od prisutnih asistenata ili profesora.

Rezultati i uvid u zadaće: