Teorija skupova – prvi kolokvij, 29. travnja 2008.

Ime i prezime: ____________________ JMBAG: ____________________

1. (a) Definirajte pojmove:
   - [1] i. uređeni par
   - [1] ii. ekvipotentni skupovi
   - [1] iii. minimalni i najmanji element

   (b) Iskažite:
   - [1] i. Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem
   - [1] ii. osnovni Cantorov teorem teorije skupova
   - [1] iii. aksiom partitivnog skupa

   [4] (c) Dokažite: svi omeđeni intervali u $\mathbb{R}$ su međusobno ekvipotentni

2. [2] (a) Neka je U proizvoljan skup, te $A, B \subseteq U$. Dokažite:

$$(A \triangle B)^c = A^c \triangle B\,.$$

   [3] (b) Nađite tranzitivno zatvorenje binarne relacije Q na skupu $\mathbb{R}$ koja je definirana kao

$$x\,Q\,y \;:\Longleftrightarrow\; |x-y| \leqslant 1\,.$$

   Za tranzitivno zatvorenje vrijedi $Q^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n$, pri čemu je $Q^n = \underbrace{Q \circ Q \circ \cdots Q}_{n\text{-puta}}$.

[5] 3. Neka je $f\colon A \to B$ funkcija. Definiramo funkciju $f^{\leftarrow}\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$

$$f^{\leftarrow}(X) := \{a \in A \mid f(a) \in X\}\,.$$

Dokažite da vrijedi: ako je f injekcija, onda je $f^{\leftarrow}$ surjekcija.

[5] 4. Odredite kardinalnost skupa svih nizova cijelih brojeva koji konvergiraju prema -2008.

[5] 5. Odredite kardinalnost skupa svih surjekcija sa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Q}$.

6. Za parcijalno uređen skup $(A, \prec)$ kažemo da je *rešetka* ako svaki dvočlani podskup od A ima supremum i infimum, te u A postoje najveći i najmanji element.

   [2] (a) Neka je X skup. Dokažite da je $(\mathcal{P}(X), \subset)$ rešetka.

   [3] (b) Navedite primjer rešetke s prebrojivo mnogo elemenata.

Napomene: Rješenje svakog zadatka pišite na poseban papir.
U uglatim zagradama nalazi se broj bodova koje nosi pojedini zadatak ili podzadatak.
Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.

Rezultati i uvid u zadaće:

Teorija skupova – prvi kolokvij, 29. travnja 2008.

Ime i prezime: ______________________ JMBAG: ______________

1. (a) Definirajte pojmove:
   [1] i. uređeni par
   [1] ii. ekvipotentni skupovi
   [1] iii. minimalni i najmanji element

   (b) Iskažite:
   [1] i. Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem
   [1] ii. osnovni Cantorov teorem teorije skupova
   [1] iii. aksiom partitivnog skupa

   [4] (c) Dokažite: svi omeđeni intervali u $\mathbb{R}$ su međusobno ekvipotentni

2.
   [2] (a) Neka je U proizvoljan skup, te $A, B \subseteq U$. Dokažite:

$$(A \triangle B)^c = A \triangle B^c .$$

   [3] (b) Nađite tranzitivno zatvorenje binarne relacije S na skupu $\mathbb{R}$ koja je definirana kao

$$x\,S\,y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \leqslant 1 .$$

   Za tranzitivno zatvorenje vrijedi $S^+ = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S^n$, pri čemu je $S^n = \underbrace{S \circ S \circ \cdots S}_{n\text{-puta}}$.

[5] 3. Neka je $f\colon A \to B$ funkcija. Definiramo funkciju $f^{\leftarrow}\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$

$$f^{\leftarrow}(X) := \{a \in A \mid f(a) \in X\} .$$

Dokažite da vrijedi: ako je f surjekcija, onda je $f^{\leftarrow}$ injekcija.

[5] 4. Odredite kardinalnost skupa svih nizova prirodnih brojeva koji konvergiraju prema 17.

[5] 5. Odredite kardinalnost skupa svih surjekcija sa $\mathbb{C}$ na $\mathbb{R}$.

6. Za parcijalno uređen skup $(B, \prec)$ kažemo da je *rešetka* ako svaki dvočlani podskup od B ima supremum i infimum, te u B postoje najveći i najmanji element.
   [2] (a) Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dokažite da skup svih djeljitelja od n uređen relacijom djeljivosti čini rešetku.
   [3] (b) Navedite primjer rešetke s neprebrojivo mnogo elemenata.

Napomene: Rješenje svakog zadatka pišite na poseban papir.
U uglatim zagradama nalazi se broj bodova koje nosi pojedini zadatak ili podzadatak.
Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.

Rezultati i uvid u zadaće: