Teorija skupova

Popravni kolokvij

15. veljače 2019.

Teorijska pitanja - možete sve na isti papir

(1) Definirajte pojmove, odnosno navedite primjere gdje se traže:
   (a) (1 bod) tranzitivno zatvorenje binarne relacije;
   (b) (1 bod) neprebrojiv skup, te navedite tri primjera;
   (c) (1 bod) najveći i maksimalni element u parcijalno uređenom skupu;
   (d) (1 bod) primjer dobrog uređaja na skupu $\mathbb{Q}$;
   (e) (1 bod) lanac u parcijalno uređenom skupu, te navedite primjer parcijalno uređenog skupa koji nema niti jedan beskonačan lanac, ali za svaki $n \in \mathbb{N}$ ima lanac s n elemenata;
   (f) (1 bod) zbrajanje i množenje kardinalnih brojeva.

(2) Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) (1 bod) aksiom para i navedite dvije njegove posljedice;
   (b) (1 bod) teorem o karakterizaciji beskonačnih skupova;
   (c) (1 bod) teorem o uređajnoj karakterizaciji skupa $\mathbb{R}$;
   (d) (1 bod) teorem o usporedivosti dobro uređenih skupova;
   (e) (1 bod) tri tvrdnje o kardinalnim brojevima;
   (f) (1 bod) teorem Tarskog, te dvije njegove posljedice.

(3) (4 boda) Dokažite da vrijedi $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$ (bez korištenja kardinalne aritmetike!).

(4) (4 boda) Dokažite da za svaki skup A postoji ordinalni broj α i funkcija $f : \alpha \to A$ tako da je $A = \{f(\beta) : \beta < \alpha\}$.

OKRENI!

Zadaci - svaki na svoj papir

svaki zadatak nosi **5 bodova**

(1) Neka su A, B, C, D skupovi. Ispitajte odnos među skupovima

$$\big((A \setminus B) \cap C\big) \triangle D \quad \text{i} \quad \big((A \triangle C) \setminus B\big) \cup D.$$

Navedite dokaze odnosno kontraprimjere za pojedine inkluzije.

(2) Neka su Q i R tranzitivne relacije na skupu A. Dokažite:
Ako je $Q \circ R = R \circ Q$, tada je $Q \circ R$ tranzitivna relacija.
Primjerom pokažite da obrat ne mora vrijediti.

(3) Dokažite da je kardinalnost skupa svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koje nisu injekcije jednaka $2^{\mathfrak{c}}$.

(4) Odredite kardinalnost skupa

$$\big\{f \mid f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (\forall i \in \mathbb{N})\big(1 < k(f^{-1}[\{i\}]) < \aleph_0\big)\big\}.$$

(5) Za svaki par navedenih linearno uređenih skupova (Kartezijevi produkti su antileksikografski uređeni), dokažite ili opovrgnite njihovu sličnost.

$$\mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \times \{0,1,2\} \qquad [-1,1\rangle \times \mathbb{N} \qquad \mathbb{Z} \times [0,1\rangle$$

(6) Neka je $(A, <)$ linearno uređen skup, te $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dobro uređeni podskupovi od A. Dokažite da je $\bigcup_{k=1}^{n} X_k$ dobro uređen skup.

(7) Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi ordinalni broj

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2} \sum_{j \in i} (i + j).$$

(8) Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Kažemo da je $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *n-raspetljan* ako je presjek svakog n-članog podskupa od A prazan. Dokažite ili opovrgnite: svaki $B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sadrži maksimalan n-raspetljan podskup od B.