Teorija skupova

Popravni kolokvij — 21. veljače 2023. godine

TEORIJSKA PITANJA

Sve zadatke s ove stranice možete rješavati na jednom papiru i predati zajedno.

Zadatak 1. *(4 boda)*

(a) (1 bod) Definirajte pojam prirodnog broja (i pomoćni pojam koji se pritom koristi).

(b) (1 bod) Iskažite Knaster–Tarskijev teorem.

(c) (2 boda) Napišite „$a = (b, c)$" u osnovnom jeziku teorije skupova (bez ikakvih pokrata).

Zadatak 2. *(4 boda)*

(a) (1 bod) Definirajte operaciju množenja na $\mathbb{Z}$. Navedite dva njena svojstva.

(b) (1 bod) Definirajte Hartogsov ordinal skupa. Ima li svaki skup Hartogsov ordinal? Treba li nam aksiom izbora da to zaključimo? (Samo odgovorite bez obrazlaganja.)

(c) (2 boda) Nacrtajte i popunite istinitosnu tablicu čiji su retci invarijante sličnosti (barem pet njih) a stupci standardni skupovi brojeva sa standardnim uređajem ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$).

Zadatak 3. *(4 boda)* Dokažite da je $f : a \to b$ bijekcija između a i b ako i samo ako postoji $g : b \to a$ takva da je $f \circ g = id_b$ i $g \circ f = id_a$.

Zadatak 4. *(4 boda)* Dokažite da je **On** prava klasa dobro uređena relacijom $\in$.

OKRENITE ZA ZADATKE!

ZADACI

Svaki od zadataka s ove stranice morate rješavati i predati **na zasebnom papiru**!

Zadatak 5. *(4 boda)* Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova. Dokažite ili opovrgnite:

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{2n}\right) \triangle \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1}\right) \quad \subseteq \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_{2n} \triangle A_{2n+1}).$$

Zadatak 6. *(4 boda)* Dan je skup $A \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{R}$ skup svih nepraznih relacija na skupu A. Na $\mathcal{R}$ je još definirana relacija $\sim$ sa

$$P \sim R \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{R})\ P = R \circ S\ .$$

Dokažite ili opovrgnite:

(a) Ako je A konačan te je $S \in \mathcal{R}$ simetrična, onda S ima parno mnogo elemenata.

(b) $\sim$ je relacija ekvivalencije na $\mathcal{R}$.

***Napomena:** Možete koristi sve tvrdnje o relacijama koje smo dokazali na vježbama!*

Zadatak 7. *(4 boda)* Odredite kardinalnost skupa svih singularnih matrica $A \in M_{2023}(\mathbb{R})$ kojima niti jedan član nije jednak 0. (Matrica A je singularna ako vrijedi $\det A = 0$.)

Zadatak 8. *(4 boda)* Dokažite ili opovrgnite sličnost sljedećih skupova:

$$A = \big([-2023, 2023] \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), \prec\big) \qquad \text{i} \qquad B = \big(\langle -2023, 2023\rangle \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), \prec\big).$$

U ovome zadatku je s $\prec$ označen antileksikografski uređaj.

Zadatak 9. *(4 boda)* Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi

$$\sum_{i\in\omega} \left(\left(\sum_{j\in\omega+i} \omega^j \right) + \omega^i \cdot i \right).$$

Zadatak 10. *(4 boda)* Neka je $\mathcal{W}$ realan vektorski prostor svih neprekidnih realnih funkcija jedne realne varijable sa zbrajanjem i množenjem skalarom definiranima po točkama. Dokažite da postoji maksimalan podprostor od $\mathcal{W}$ koji ne sadrži polinome te se sastoji od funkcija čiji je integral na segmentu $[0, 2\pi]$ jednak 0.