Teorija skupova

Popravni kolokvij

17. veljače 2022.

(svaki zadatak vrijedi **4 boda**)

Teorijska pitanja

Jedna hrpa: zadaci 1 i 3 Druga hrpa: zadaci 2 i 4

(1) (a) (1 bod) Definirajte sljedbenik i induktivni skup. Postoji li skup koji je oboje?

(b) (1 bod) Iskažite Dedekindov teorem rekurzije. Navedite primjer funkcije koja se njime definira.

(c) (2 boda) Dokažite: ako je $(a, c) = (b, d)$, tada je $a = b$.

(2) (a) (1 bod) Iskažite Zornovu lemu. Navedite jedan važan rezultat teorije skupova koji se njome dokazuje.

(b) (1 bod) Definirajte kardinalni broj. Je li $\omega \cdot 5$ kardinalni broj?

(c) (2 boda) Što sve može biti unija neke familije realnih brojeva? Obrazložite.

(3) Dokažite Knaster–Tarskijev teorem.

(4) Dokažite da za svaki skup postoji jedinstveni kardinalni broj ekvipotentan s njim.

OKRENITE!

Zadaci

(svaki zadatak vrijedi **4 boda**)

Jedna hrpa: zadaci 1, 2 i 6 Druga hrpa: zadaci 3, 4 i 5

(1) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova. Ispitajte odnos skupova

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Big(A_n \triangle \bigcap_{k\geq n+1} A_k\Big) \quad \text{i} \quad (\liminf_n A_n) \setminus \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

Sve svoje tvrdnje dokažite.

(2) Neka je A skup, $a \in A$ te neka su R i Q parcijalni uređaji na A. Dokažite ili opovrgnite:

(a) ako je $R \cap Q^{-1} = \emptyset$ i $R \circ Q = Q \circ R$, tada je $R \circ Q$ parcijalni uređaj;

(b) ako je a maksimalan s obzirom na Q, tada je a maksimalan s obzirom na $R \circ Q$;

kao i obrate tih tvrdnji.

Napomena: tvrdnju (b) ispitajte u slučaju kada je $R \circ Q$ parcijalni uređaj na A.

(3) Odredite kardinalnost skupa svih prebrojivih podskupova od $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ čiji elementi su u parovima disjunktni.

(4) Za svaki par navedenih totalno uređenih skupova dokažite ili opovrgnite njihovu sličnost:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

(5) Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi

$$\sum_{i\,\in\,\omega\,\cdot\,2} i^{\omega+i}.$$

(6) Za $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ kažemo da je *antigust* ako za svaki $A \in X$ koji nije maksimalan u X postoji $a \in \mathbb{R} \setminus A$ takav da je $A \cup \{a\} \in X$. Dokažite da postoji maksimalan neprazan antigust podskup od $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ koji je totalno uređen s obzirom na inkluziju.

(Teorijska pitanja su na drugoj strani.)