Teorija skupova

Popravni kolokvij

3. ožujka 2021.

(svaki zadatak vrijedi **4 boda**)

Teorijska pitanja

Jedna hrpa: zadaci 1 i 4 Druga hrpa: zadaci 2 i 3

(1) (a) (1 bod) Definirajte uređeni par. Napišite u najjednostavnijem obliku $(\emptyset, \emptyset)$.
(b) (1 bod) Pomoću kojeg aksioma (i na koji skup ga treba primijeniti) se može dokazati da za svaki x vrijedi $x \notin x$?
(c) (2 boda) Dokažite da definicija potenciranja kardinalnosti ne ovisi o reprezentantima.

(2) (a) (1 bod) Dokažite da za svaki $\kappa \in \mathbf{Cn}$, $\mathrm{card}(\kappa) = \kappa$.
(b) (1 bod) Dokažite ili opovrgnite: postoji skup a takav da za svaki $\alpha \in \mathbf{On}$ postoji surjekcija $f : a \to \alpha$.
(c) (2 boda) Dokažite da je ordinal granični ako i samo ako je induktivan.

(3) Neka je $n \in \omega$ i $f : n \to n$ injekcija. Dokažite da je $\mathrm{rng}\, f = n$.

(4) Neka je f hiperniz (funkcija čija domena je ordinal). Definirajte jedan dobar uređaj na $\mathrm{rng}\, f$ i dokažite da je to dobar uređaj.

OKRENI!

Zadaci

Jedna hrpa: zadaci 1, 3 i 6 Druga hrpa: zadaci 2, 4 i 5

(1) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova. Ispitajte odnos među skupovima

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq k}(A_n \triangle A_{n+1}) \quad \text{i} \quad \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geq k}(A_n \triangle A_{n+1})\,.$$

Navedite dokaze odnosno kontraprimjere za pojedine inkluzije.

(2) Odredite kardinalnost skupa svih injekcija $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$.

(3) Neka je $(X,<)$ TUS i R relacija na X definirana s:

$$x\;R\;y \quad :\Longleftrightarrow \quad x<y \;\wedge\; \neg(\exists z\in X)(x<z<y).$$

Dokažite: ako je $(X,<)$ lokalno konačan, $<$ je tranzitivno zatvorenje relacije R: $(<) = \bigcup_{n\geq 1} R^n$. Navedite primjer koji pokazuje da navedena jednakost ne mora vrijediti općenito.

(4) Za svaki par navedenih skupova (uz standardni, odnosno antileksikografski uređaj) dokažite ili opovrgnite njihovu sličnost:

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Q},\quad \mathbb{N}\times\mathbb{Q},\quad \mathbb{Q}\times\mathbb{N},\quad \mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}.$$

(5) Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi:

$$\sum_{i\,\in\,\omega\cdot 2} i^2\cdot(\omega+i).$$

(6) Neka je X skup i R relacija na X.
Dokažite da postoji maksimalni podskup S od X
takav da je $R\cap(S\times S)$ relacija ekvivalencije na S.