Teorija skupova

popravni kolokvij

14. veljače 2020.

Teorijska pitanja - možete sve na isti papir

(1) Definirajte pojmove, odnosno navedite primjere gdje se traže:

(a) (1 bod) uređeni par, te navedite osnovno svojstvo uređenih parova;

(b) (1 bod) navedite tri beskonačna skupa tako da nikoja dva nisu međusobno ekvipotentna;

(c) (1 bod) particija nepraznog skupa, te navedite primjer particije skupa $\mathbb{R}$ na neprebrojivo mnogo prebrojivih skupova;

(d) (1 bod) infimum podskupa parcijalno uređenog skupa;

(e) (1 bod) kardinalni broj proizvoljnog skupa, te odredite $k(\omega + 1)$ i $k(\omega^{\omega})$.

(f) (1 bod) potenciranje kardinalnih brojeva.

(2) Iskažite sljedeće tvrdnje:

(a) (1 bod) aksiom ekstenzionalnosti i navedite dvije njegove posljedice;

(b) (1 bod) Banachova lema;

(c) (1 bod) aksiom beskonačnosti i navedite jednu njegovu posljedicu;

(d) (1 bod) teorem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$;

(e) (1 bod) teorem enumeracije, te navedite jednu njegovu posljedicu;

(f) (1 bod) Russellov multiplikativni aksiom.

(3) (4 boda) Neka je A neprebrojiv skup i $B \subseteq A$ prebrojiv. Definirajte bijekciju koja opravdava da vrijedi $A \setminus B \sim A$.

(4) (4 boda) Dokažite da Zornova lema povlači Hausdorffov princip maksimalnosti.

OKRENI!

Zadaci - svaki na svoj papir

svaki zadatak nosi **5 bodova**

(1) Neka su A, B, C i D proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$A \triangle B \triangle C \triangle D \quad \text{i} \quad (A \triangle B \triangle C) \cap (B \triangle D \triangle A).$$

Argumentirajte svoje tvrdnje dokazima, odnosno kontraprimjerima.

(2) Neka je A skup i R relacija na A. Ako je $R^2 = I_A$, dokažite da je R simetrična. Vrijedi li obrat te tvrdnje?

(3) Odredite kardinalnost skupa svih injekcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje nisu surjekcije.

(4) U parcijalno uređenom skupu $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subset)$ promatramo podskup

$$A = \{S \subseteq \mathbb{R} \mid S \not\subseteq \mathbb{Q} \text{ i } S \cap \mathbb{N} \neq \emptyset\}.$$

Dokažite da je kardinalnost skupa svih minimalnih elemenata u A jednaka c.

(5) Jesu li $[0, +\infty\rangle \times \{0, 1\}$ i $[0, 1\rangle \times [0, 1]$ (uređeni antileksikografski) slični? Sve svoje tvrdnje dokažite.

(6) Za podskup A linearno uređenog skupa $(X, <)$ kažemo da je *inicijalni segment* u X ako vrijedi

$$(\forall a \in A)(\forall x \in X)\big(x \leq a \;\Rightarrow\; x \in A\big).$$

Dokažite ili opovrgnite: ako su X i Y linearno uređeni skupovi takvi da je X sličan nekom inicijalnom segmentu u Y i Y sličan nekom inicijalnom segmentu u X, onda je $X \simeq Y$.

(7) Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi:

$$\sum_{i \in \omega+1} \prod_{j \in i} (i + j)^{\omega \cdot 2}$$

(8) Neka je X skup i R relacija na X. Dokažite da postoji maksimalna relacija Q na X sa svojstvom da je $Q^{-1} \circ R \circ Q = R$.