Teorija skupova

Popravni kolokvij

16. veljače 2018.

Teorijska pitanja - možete sve na isti papir

(1) Definirajte pojmove i navedite primjere gdje se traže:
- (a) (1 bod) indeksirana familija skupova;
- (b) (1 bod) ako su A i B skupovi, definirajte što znači da je $k(A)$ manje od $k(B)$;
- (c) (1 bod) dobro uređen skup, te navedite tri primjera beskonačnih dobro uređenih skupova;
- (d) (1 bod) induktivan skup, te navedite dva primjera;
- (e) (1 bod) restrikcija funkcije.

(2) Iskažite sljedeće tvrdnje:
- (a) (1 bod) teorem o karakterizaciji beskonačnih skupova;
- (b) (1 bod) Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem;
- (c) (1 bod) osnovni Cantorov teorem teorije skupova;
- (d) (2 boda) shema aksioma zamjene.

(3) (1 bod) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati):
- (a) Postoji konačno mnogo sličnosti s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$;
- (b) Princip transfinitne indukcije vrijedi za svaki konačan linearno uređen skup;
- (c) Svaka sličnost $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ je oblika $f(x) = ax$, gdje je a neki cijeli broj.

(4) (1 bod) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati):
- (a) Postoji skup A takav da je $\mathcal{P}(A)$ prebrojiv;
- (b) Svaki beskonačan dobro uređen skup ima početni komad sličan s $\mathbb{N}$;
- (c) Svaki skup je element nekog tranzitivnog skupa.

(5) (4 boda) Neka je $(B, \prec)$ linearno uređen skup koji nema ni najveći ni najmanji element. Neka je $A \subseteq B$ podskup koji je gust u B. Dokažite da tada skup A nema ni najmanji ni najveći element, te da je A gust skup.

(6) (4 boda) Dokažite da je za svaki prirodni broj m, svaki podskup od $\mathbb{N}_m$ konačan.

OKRENI!

Zadaci - svaki na svoj papir

svaki zadatak nosi **5 bodova**

(1) Neka su A, B, C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$(A \triangle B) \cap (A \triangle C) \quad \text{i} \quad A \triangle (B \cap C).$$

Argumentirajte svoje tvrdnje dokazima, odnosno kontraprimjerima.

(2) Neka je R neprazna relacija na skupu A sa svojstvom da za sve $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \neq m$ vrijedi $R^n \cap R^m = \emptyset$. Dokažite da je tada R^n irefleksivna i antisimetrična za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Postoji li relacija R s navedenim svojstvom takva da je $R^n \neq \emptyset$ za svaki $n \in \mathbb{N}$?

(3) Odredite kardinalnost skupa svih parcijalnih uređaja na $\mathbb{Z}$ koji su disjunktni sa standardnim uređajem $<$ na $\mathbb{Z}$.

(4) Dokažite da za svaki prebrojiv $A \subseteq \mathbb{R}$ postoji neprebrojiv $B \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $A \cap (A + B) = \emptyset$. Ovdje je $A + B = \{a + b \,:\, a \in A, b \in B\}$.

(5) Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup takav da svaki podskup od A ima gornju među. Dokažite da svaki podskup od A ima supremum. Navedite primjer jednog takvog skupa A.

(6) Neka su skupovi $\{0, 1\} \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ uređeni antileksikografski. Odredite jesu li slični. Sve svoje tvrdnje obrazložite.

(7) Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi:

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2018} \sum_{j \in i+1} \prod_{k \in j+1} (k+1)^{\omega}.$$

(8) Za skup $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je *potpuno iracionalan* ako je neprazan, $A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ i $(A - A) \cap \mathbb{Q} = \{0\}$. Dokažite da postoji maksimalan (u smislu inkluzije) potpuno iracionalan podskup od $\mathbb{R}$. Ovdje je $A - A = \{a - b \,:\, a \in A, b \in A\}$.

OKRENI!