Teorija skupova

popravni kolokvij

17. veljače 2017.

Teorijska pitanja (možete sve odgovore pisati na jedan papir)

1. Definirajte pojmove i navedite primjere gdje se traže:
   (a) (1 bod) particija nepraznog skupa, te primjer particije skupa $\mathbb{R}$ na neprebrojivo mnogo prebrojivih skupova;
   (b) (1 bod) relacija ekvivalencije, te navedite dva primjera beskonačnih relacija ekvivalencije;
   (c) (1 bod) $k(A) + k(B)$, gdje su A i B proizvoljni skupovi.
   (d) (1 bod) antileksikografski uređaj, te navedite primjer za $A \times B \not\simeq B \times A$ (s antileksikografskim uređajem).
   (e) (1 bod) početni komad, te navedite dva primjera beskonačnih početnih komada u istom uređenom skupu.

2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) (1 bod) aksiom unije;
   (b) (1 bod) teorem o karakterizaciji beskonačnih skupova;
   (c) (1 bod) Dedekindov teorem rekurzije;
   (d) (1 bod) princip transfinitne indukcije;
   (e) (1 bod) teorem Tarskoga.

3. (1 bod) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati):
   (a) Skup $\{5, 7, 8\}$ je prebrojiv.
   (b) Ako je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjekcija, tada je f i injekcija.
   (c) ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \sim {}^{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$.

4. (1 bod) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati):
   (a) Za svaki skup x postoji najmanji α takav da je $x \in V_\alpha$.
   (b) Klasa svih prebrojivih ordinalnih brojeva je skup.
   (c) Svaki kardinalni broj je granični ordinalni broj.

5. (4 boda) Neka su A, B, C i D u parovima disjunktni skupovi, takvi da A ima 5 elemenata, a B, C i D su prebrojivi. Dokažite da je $A \cup B \cup C \cup D$ prebrojiv skup.

6. (4 boda) Dokažite da za svaki skup ordinalnih brojeva postoji infimum.

Teorija skupova

popravni kolokvij

zadaci - svaki na svoj papir

17. veljače 2017.

Svaki zadatak nosi po 5 bodova.

1. Neka su A, B, C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos između skupova

$$(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) \quad \text{i} \quad (A \cap C) \setminus B.$$

2. Zadan je skup A i relacija $\mathcal{R}$ na skupu A. Dokažite ili opovrgnite:

   (a) Relacija $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ je nužno simetrična.

   (b) Relacija $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ je nužno refleksivna.

3. Dana su tri skupa: $\mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cap \langle 13, 14]$. Odredite koji među njima su međusobno slični, a koji ne. Argumentirajte!

4. Neka je A bilo koji skup takav da postoji bijekcija $f : A \to \langle 1, 2016\rangle$. Odredite kardinalnost skupa svih podskupova $B \subseteq A$ za koje vrijedi da postoji bijekcija $g : B \to [0, 1]$.

5. Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova od $\mathbb{R}$ koji zadovoljavaju sljedeća svojstva

   (a) Svaki skup $A \in \mathcal{F}$ je prebrojiv.

   (b) Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ takve da je $x < y$ i za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi $\langle x, y\rangle \cap A \neq \emptyset$.

   Dokažite da su svi skupovi iz $\mathcal{F}$ međusobno slični.

6. Ispitajte jesu li skupovi $(\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle) \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ i $\mathbb{R} \times (\langle 0, 1\rangle \setminus \{\frac{1}{2}\})$ međusobno slični.

7. Neka je $n \in \omega$, $n \neq 0$. Zapišite u Cantorovoj normalnoj formi:

$$\sum_{i_1 \in \omega} \sum_{i_2 \in i_1} \cdots \sum_{i_n \in i_{n-1}} \prod_{j \in i_n} \omega^j.$$

8. Neka je $(S, <)$ neprazan totalno uređen skup koji ima najmanji element. Dokažite da postoji dobro uređen podskup $A \subseteq S$ takav da za sve $x \in S \setminus A$ postoje $a, b \in A$ takvi da je $a < x < b$.