Teorija skupova

popravni kolokvij

teorijski dio - možete sve na isti papir

12. veljače 2016.

Teorijska pitanja (sva na jedan papir)

1. Definirajte sljedeće pojmove:

   (a) (1 bod) neprebrojiv skup, te navedite tri primjera neprebrojivih skupova različitih kardinalnosti;

   (b) (1 bod) Kartezijev produkt indeksirane familije skupova;

   (c) (1 bod) minimalni element u parcijalno uređenom skupu, te navedite primjer beskonačnog parcijalno uređenog skupa koji ima minimalni element, a nema najmanji element;

   (d) (1 bod)) prirodan broj;

   (e) (1 bod) granični ordinalni broj, te navedite tri primjera graničnih ordinalnih brojeva;

   (f) (1 bod) zbrajanje i množenje kardinalnih brojeva.

2. Iskažite sljedeće tvrdnje:

   (a) (1 bod) aksiom ekstenzionalnosti;

   (b) (1 bod) teorem o karakterizaciji beskonačnih skupova;

   (c) (1 bod) shema aksioma separacije;

   (d) (1 bod) prinicip transfinitne indukcije;

   (e) (1 bod) tri svojstva množenja kardinalnih brojeva;

   (f) (1 bod) Hausdorffov princip maksimalnosti.

3. (4 boda) Neka su A, B i C skupovi, te a, b i c redom oznake za njihove kardinalnosti. Dokažite da vrijedi $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

4. (4 boda) Definirajte skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ te zbrajanje i množenje na tom skupu. (Pretpostavljamo da je definiran skup cijelih brojeva i operacije na na njemu).

Teorija skupova

popravni kolokvij

zadaci - svaki na svoj papir

12. veljače 2016.

Svi zadaci nose po 5 bodova.

1. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos između (argumentirajte!)

$$((B \setminus C) \setminus A) \cup (A \setminus B) \qquad \text{i} \qquad (C \cup A)\, \Delta B.$$

2. Neka je R binarna relacija na skupu A takva da je $R^2 = \{(a,a) : a \in A\}$. Mora li R biti funkcijska relacija? Argumentirajte! Odredite R^{2015} i R^{2016}.

3. Odredite kardinalnost skupa svih derivabilnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4. Dokažite da je "imati početni komad koji je prebrojiv i početni komad koji je neprebrojiv" invarijanta sličnosti.

5. Jesu li skupovi

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\Big\} \qquad \text{i} \qquad \Big\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > y\Big\}$$

   (uređeni antileksikografski) slični? Obrazložite.

6. Transfinitnom indukcijom po α dokažite: ako je $\beta := \omega^{\omega^\alpha}$, tada za sve $0 < \gamma < \beta$ vrijedi $\gamma \cdot \beta = \beta$.

7. Izračunajte (rezultat zapišite u Cantorovoj normalnoj formi)

$$\prod_{\alpha \in \omega \cdot 2 + 2} \left(2^\alpha + \alpha^2\right) .$$

8. Neka je B neprazni podskup ravnine. Dokažite da postoji maksimalni neprazni konveksni podskup od B. (Skup A je *konveksan* ako za svake dvije različite točke iz A, dužina koja spaja te točke pripada skupu A.)