

## Teorija skupova – popravni kolokvij

### Teorijska pitanja (sva na jedan papir)

- Definirajte sljedeće pojmove:
  - (1 bod) indeksirana familija skupova;
  - (1 bod) neprebrojiv skup, te navedite tri primjera;
  - (1 bod) parcijalno uređen skup;
  - (1 bod) particija skupa;
  - (1 bod) tranzitivni skup, te navedite tri primjera skupa koji nisu tranzitivni;
  - (1 bod) množenje kardinalnih brojeva.
- Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (1 bod) Banachova lema;
  - (1 bod) aksiom beskonačnosti;
  - (1 bod) teorem o fiksnoj točki;
  - (1 bod) tri tvrdnje o dobro uređenim skupovima;
  - (1 bod) Cantorova hipoteza kontinuuma;
  - (1 bod) Russellov multiplikativni aksiom.
- (4 boda) Dokažite da vrijedi  $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$ .
- (4 boda) Dokažite da za svaki dobro uređen skup vrijedi princip transfinitne indukcije.

### Zadaci (svaki na svoj papir)

- (5 bodova) Odredi odnos među skupovima

$$(A \Delta B) \cap B \quad \text{i} \quad (B \cup C) \setminus A.$$

- (5 bodova) Odredite kardinalnost skupa svih redova realnih brojeva čija je suma  $\sqrt{2}$ .
- (5 bodova) Odredi sve sličnosti  $f : X \rightarrow X$ , gdje je  $X = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(x^2 = \frac{1}{n})\}$  podskup od  $\mathbb{R}$  s naslijeđenim uređajem.
- (5 bodova) Neka su  $R, S$  i  $T$  relacije na skupu  $Y$  tako da je  $T \circ S^{-1} \subseteq I_Y$ . Dokaži da je  $R \circ (S \cap T) = (R \circ S) \cap (R \circ T)$ .

9. (5 bodova) Neka je  $A = \{-q^2 + \sqrt{7}q + 10 \mid q \in \mathbb{Q}\}$  podskup od  $\mathbb{R}$  sa naslijeđenim uređajem. Je li on sličan sa  $(\mathbb{Q}, <)$ , gdje je  $<$  standardni uređaj?
10. (5 bodova) Dokaži ili opovrgni: svaka dva prebrojiva, dobro uređena skupa, su slična.
11. (5 bodova) Zapiši ordinal  $(\omega + 2)^{\omega+2}$  u Cantorovoj normalnoj formi.
12. (5 bodova) Dokaži da postoji maksimalan skup  $B \subseteq \mathbb{R}$ , koji je disjunktan sa  $\mathbb{Q}$ , te za različite  $x, y$  iz  $B$  je  $x - y$  racionalan broj.