Teorija skupova

popravni kolokvij

teorijski dio

21. veljače 2014.

1. Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje je navedeno:
   (svaka definicija, odnosno definicija i primjeri nose po jedan bod)

   (a) prebrojiv skup, te navedite pet primjera prebrojivih skupova;

   (b) relacija ekvivalencije, te navedite jedan primjer;

   (c) Kartezijev produkt proizvoljne indeksirane familije skupova;

   (d) maksimalni element u parcijalno uređenom skupu, te navedite primjer parcijalno uređenog skupa koji ima maksimalni element, a nema najveći element;

   (e) granični ordinalni broj, te navedite tri primjera graničnih ordinalnih brojeva;

   (f) induktivan skup.

2. Iskažite sljedeće tvrdnje, odnosno aksiome:
   (svaka tvrdnja, odnosno aksiom, nose po 1 bod)

   (a) aksiom ekstenzionalnosti;

   (b) teorem o karakterizaciji beskonačnih skupova;

   (c) teorem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{R}$

   (d) prinicip transfinitne indukcije;

   (e) teorem enumeracije;

   (f) Teorem Tarskoga

3. (4 boda) Neka je $(B, \prec)$ linearno uređen skup koji nema ni najveći ni najmanji element. Neka je $A \subseteq B$ podskup koji je gust u B. Dokažite da tada skup A nema ni najmanji ni najveći element, te da je A gust skup.

4. (4 boda) Neka je α ordinalni broj i $\beta \in \alpha$. Dokažite da je β također ordinalni broj.

Teorija skupova

popravni kolokvij

zadaci

21. veljače 2014.

Svi zadaci nose po 5 bodova.

1. Neka je A_0, A_1, A_2,... različiti skupovi. Ispitajte odnos između skupova
$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_i\right) \qquad \text{i} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{n+1} \setminus A_n) \ .$$

2. Neka je R binarna relacija na skupu A. Dokažite ili opovrgnite: najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži R je
$$\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} R^m \ .$$

3. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija *iz* $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{Q}$.
("funkcije iz A" znači: funkcije čija domena je podskup od A.)

4. *Pseudorešetka* je parcijalno uređen skup u kojem svaki konačni podskup ima infimum i supremum. *Rešetka* je pseudorešetka s najmanjim i najvećim elementom. Dokažite: pseudorešetka u kojoj svaki (i prazni) lanac ima donju i gornju među je rešetka.

5. Označimo s K skup svih nizova u $\{0, 1\}$ s konačno mnogo jedinica. Odredite $\tau(K)$, s antileksikografskim uređajem.

6. Transfinitnom indukcijom dokažite asocijativnost množenja ordinalnih brojeva. Navedite koja ostala svojstva operacija koristite, kao i gdje ih koristite (ne morate definicije).

7. Odredite sve $\alpha \in \omega^2$ takve da je
$$2^\alpha < \alpha^2 \ .$$

8. Dokažite da postoji maksimalni neprazni podskup od $\mathbb{R}$, zatvoren na množenje, koji ne sadrži nijedan prirodan broj.