Teorija skupova

popravni kolokvij

teorijski dio

25. siječnja 2013.

1. Napišite definicije sljedećih pojmova, u pojedinim slučajevima uz primjere:
   (a) (2 boda) Particija nepraznog skupa; navedite primjere particije skupa $\mathbb{R}$ na prebrojivo mnogo neprebrojivih skupova i na neprebrojivo mnogo prebrojivih skupova
   (b) (1 bod) Funkcija izbora neprazne familije nepraznih skupova
   (c) (1 bod) Sličnost parcijalno uređenih skupova; navedite primjere tri para različitih, ali sličnih skupova
   (d) (1 bod) Tranzitivan skup; navedite tri primjera (od kojih barem dva beskonačna) tranzitivnih skupova
   (e) (1 bod) Potenciranje ordinalnih brojeva
2. Napišite iskaze (svaki točan iskaz donosi po 1 bod):
   (a) Cantorov osnovni teorem
   (b) Aksiom beskonačnosti
   (c) Uređajna karakterizacija skupa $\mathbb{R}$
   (d) Shema aksioma zamjene
   (e) Princip transfinitne indukcije
   (f) Zornova lema
3. (4 boda) Dokažite Cantor-Schröder-Bernsteinov teorem (iskažite, bez dokaza, Banachovu lemu koja se pritom primjenjuje)
4. (4 boda) Dokažite: ako su ordinalni brojevi slični, onda su jednaki.

Teorija skupova

popravni kolokvij

zadaci

25. siječnja 2013.

Svi zadaci nose po 5 bodova.

1. Dokažite da za svaki niz skupova $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vrijedi

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n>m} A_n \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{n>m} A_n$$

te kontraprimjerom pokažite da jednakost ne mora vrijediti.

2. Neka je $f : A \to B$ proizvoljna neprazna funkcija. Dokažite da postoji funkcija $g : B \to A$ takva da je $f \circ g \circ f = f$ i $g \circ f \circ g = g$.

3. Kolika je kardinalnost skupa svih sustava linearnih jednadžbi s tri jednadžbe i dvije nepoznanice koji imaju beskonačno mnogo rješenja?

4. Vrijedi li obrat Zornove leme? Svoje tvrdnje dokažite.

5. Postoji li skup X čiji se partitivni skup može dobro urediti da bude

$$\operatorname{ord}(\mathcal{P}(X), \prec) = \omega^2 + 3\ ?$$

6. Od sljedeća tri totalno uređena skupa, koji su slični a koji nisu? Obrazložite zašto imaju/nemaju potrebna svojstva ili konstruirajte sličnosti.

$$\mathbb{R}_0^- \times \mathbb{N}\,, \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}\,, \quad \mathbb{R}^+$$

7. Za ordinalni broj $\alpha > 1$ kažemo da je *prost* ako $\alpha = \beta \cdot \gamma$ povlači $1 \in \{\beta, \gamma\}$. Jesu li ordinalni brojevi ω, $\omega + 1$, $\omega + 3$, $\omega^\omega + 1$ prosti?

8. Za neprazan otvoren skup S u ravnini kažemo da je *prepriječen* ako za svake dvije (različite) točke $A, B \in S$ postoji treća točka $C \in S$ takva da je $C \in \overline{AB} \setminus \{A, B\}$ (C je između A i B). Dokažite da svaki neprazan otvoren skup u ravnini ima maksimalan prepriječen podskup.