Teorija skupova

popravni kolokvij

teorijski dio

20. lipnja 2012.

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) konačan i beskonačan skup
   (b) (1 bod) klasa ekvivalencije neke relacije ekvivalencije
   (c) (1 bod) Kartezijev produkt proizvoljne indeksirane familije skupova
   (d) (1 bod) maksimalni i najveći element parcijalno uređenog skupa
   (e) (1 bod) lanac u parcijalno uređenom skupu
   (f) (1 bod) induktivan skup

2. Iskažite sljedeće tvrdnje, odnosno aksiome:
   (a) (1 bod) Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem
   (b) (1 bod) aksiom unije
   (c) (1 bod) Knaster, Tarskijev teorem
   (d) (1 bod) Dedekindov teorem rekurzije
   (e) (1 bod) teorem enumeracije
   (f) (1 bod) aksiom izbora

3. (4 boda) Dokažite da je unija prebrojivog i neprebrojivog skupa jedan neprebrojiv skup.

4. (4 boda) Dokažite da za svaki skup ordinalnih brojeva postoji supremum.

Teorija skupova

popravni kolokvij

zadaci

20. lipnja 2012.

Svi zadaci nose po 5 bodova.

1. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Odredite odnos među skupovima
$$A \setminus (B \cup C) \cup (A \cap C) \setminus B \quad \text{i} \quad A \setminus (B \cap C).$$

2. Na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ je zadana relacija ρ, tako da $A \rho B$ znači da je $A \triangle B$ konačan. Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije, i odredite klasu skupa {-1,7}.

3. Odredite kardinalnost skupa svih konvergentnih nizova realnih brojeva, kojima je limes za dva veći od prvog člana niza.

4. Dokažite da je kardinalnost skupa svih funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje su neprekidne na $\mathbb{R} \setminus \{\pi^e, e^\pi\}$, jednaka $\mathfrak{c}$.

5. Jesu li skupovi $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ (uređeni antileksikografski) slični? Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

6. Dokažite da je "biti sličan s nekim svojim pravim podskupom" invarijanta sličnosti za totalno uređene skupove.

7. Izračunajte:
$$(\omega^2 + 1)^\omega + (\omega^2 + \omega^7) \cdot (\omega^2 + 3)^2 + (\omega \cdot 4 + 2) \cdot (\omega + \omega^3) \cdot 2.$$

8. Dokažite da postoji maksimalni (u smislu inkluzije) neprazni podskup S od $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ takav da je $(x_1 + x_2, y_1 \cdot y_2) \in S$ za sve $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ te takav da je $S \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \emptyset$.