Popravni kolokvij iz Teorije skupova 21/06/2011

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) prebrojiv skup
   (b) (1 bod) relacija ekvivalencije
   (c) (1 bod) maksimalni element parcijalno uređenog skupa
   (d) (1 bod) dobro uređen skup
   (e) (1 bod) tranzitivni skup
   (f) (1 bod) kardinalni broj proizvoljnog skupa
2. Iskažite sljedeće tvrdnje, odnosno aksiome:
   (a) (1 bod) Banachova lema
   (b) (1 bod) aksiom partitivnog skupa
   (c) (1 bod) prinicip transfinitne indukcije
   (d) (1 bod) teorem o uređanoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$
   (e) (1 bod) Cantorova hipoteza kontinuuma
   (f) (1 bod) Zornova lema
3. (4 boda) Dokažite da vrijedi $c \cdot c = c$
4. (4 boda) Dokažite da klasa svih ordinalnih brojeva nije skup.
5. Neka su A, B i C skupovi. Ispitajte odnos među skupovima $A \triangle (B \setminus C)$ i $A \setminus (B \triangle C)$. Navedite dokaze odnosno kontraprimjere za pojedine inkluzije.
6. Dokažite da je separabilnost invarijanta sličnosti (za linearno uređene skupove).
7. Jesu li skupovi $\langle 0, 1] \times \mathbb{Z}$ i $[0, 1\rangle \times \mathbb{Z}$, s antileksikografskim uređajem, slični? Obrazložite svoje tvrdnje.
8. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

   (i) Ako je S skup te $\mathcal{F}$ familija binarnih relacija na S takva da je $\bigcup \mathcal{F}$ irefleksivna binarna relacija na S, onda je R irefleksivna relacija na S za svaki $R \in \mathcal{F}$.

   (ii) Ako je S skup te $\mathcal{F}$ familija binarnih relacija na S takva da je $\bigcup \mathcal{F}$ refleksivna binarna relacija na S, onda je R refleksivna relacija na S za svaki $R \in \mathcal{F}$.

   (iii) Ako je S skup te $\mathcal{F}$ familija binarnih relacija na S takva da je $\bigcup \mathcal{F}$ tranzitivna binarna relacija na S, onda je R tranzitivna relacija na S za svaki $R \in \mathcal{F}$.
9. Izračunajte $(\omega + 2)^{\omega+2} \cdot (\omega + 3) + (\omega \cdot 2)^3$.
10. Dokažite da postoji maksimalan (u smislu inkluzije) neprazan podskup S od $\mathbb{C}$ takav da je $z_1 + z_2 \in S$ za sve $z_1, z_2 \in S$ te takav da je $S \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.