Teorija skupova

popravni kolokvij

teorijski dio

23. lipnja 2010.

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) konačan i beskonačan skup
   (b) (1 bod) refleksivna, irefleksivna i simetrična relacija
   (c) (1 bod) ordinalni broj prve vrste i granični ordinalni broj
   (d) (1 bod) induktivan skup i prirodan broj
   (e) (1 bod) particija skupa
   (f) (1 bod) Kartezijev produkt familije skupova

2. Iskažite sljedeće tvrdnje, odnosno aksiome:
   (a) (1 bod) Cantorov osnovni teorem teorije skupova
   (b) (1 bod) aksiom unije
   (c) (1 bod) Dedekindov teorem rekurzije
   (d) (1 bod) teorem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{R}$
   (e) (1 bod) aksiom dobre utemeljenosti
   (f) (1 bod) Zornova lema

3. (4 boda) Neka su f i g funkcije takve da je definirana kompozicija $g \circ f$, te je ta kompozicija bijekcija. Dokažite da je tada funkcija f injekcija. Mora li tada funkcija g biti injekcija? Dokažite ili nađite protuprimjer.

4. (4 boda) Dokažite da definicija zbrajanja racionalnih brojeva ne ovisi o izboru reprezentanata.

Teorija skupova

popravni kolokvij

zadaci

23. lipnja 2010.

Svi zadaci nose po 5 bodova.

1. Neka su A, B i C skupovi. Odredite odnos među skupovima
$$A \setminus (B \setminus C) \qquad \text{i} \qquad (A \cap C) \setminus B \ .$$

2. Na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je zadana relacija ρ, tako da $A \rho B$ znači da je $A \triangle B$ konačan. Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije, i odredite klasu skupa $\{3{,}5\}$.

3. Dokažite da je kardinalnost skupa svih ograničenih nizova realnih brojeva jednaka $\mathfrak{c}$.

4. Neka je S skup svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \langle -\infty, 1]$. Neka je $\prec$ parcijalni uređaj na S definiran sa
$$f \prec g :\Longleftrightarrow f(0) < g(0) \ .$$
Neka je A skup svih maksimalnih elemenata u $(S, \prec)$. Odredite $k(A)$.

5. Dokažite da je "svaki početni komad je prebrojiv" invarijanta sličnosti.

6. Je li skup $\langle 1, 2\rangle \times \{3, 4, 5\}$ sličan s $\mathbb{R}$? Obrazložite.

7. Izračunajte
$$(\omega + 2010) \cdot (\omega \cdot 2010 + 5)^{\omega} \ .$$

8. Dokažite da postoji maksimalan neprazan podskup T od $\mathbb{R}$ takav da je $\sin x - \sin y \in \mathbb{Q}$, za sve $x, y \in T$.