

Teorija skupova – popravni kolokvij
TEORIJSKI DIO

- (1) Definirajte sljedeće pojmove:
 - (a) (1 bod) beskonačan skup
 - (b) (1 bod) irefleksivna relacija
 - (c) (1 bod) gornja međa podskupa parcijalno uređenog skupa
 - (d) (1 bod) lanac
 - (e) (1 bod) ordinalni broj prve vrste
 - (f) (1 bod) kardinalni broj skupa
- (2) Iskažite sljedeće tvrdnje, odnosno aksiome:
 - (a) (1 bod) Banachova lema
 - (b) (1 bod) aksiom unije
 - (c) (1 bod) shema aksioma separacije
 - (d) (1 bod) Knaster, Tarskijev teorem
 - (e) (1 bod) Dedekindov teorem rekurzije
 - (f) (1 bod) Zermelov teorem
- (3) (4 boda) Dokažite da su svi omeđeni interavali skupa \mathbb{R} međusobno ekvipotentni.
- (4) (4 boda) Dokažite da je unija dva ordinalna broja također ordinalni broj.

Teorija skupova – popravni kolokvij
ZADACI

- (1) Neka su A , B i C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos između skupova

$$B \setminus (A \Delta C) \quad \text{i} \quad C \setminus (A \cap B).$$

Ispitajte inkluzije i disjunktnost. Dokažite svoje tvrdnje.

- (2) Neka su R i S relacije ekvivalencije na skupu A , takve da vrijedi $R \circ S = S \circ R$. Dokažite da je $R \circ S$ također relacija ekvivalencije na A .

- (3) Odredite kardinalnost skupa svih konvergentnih redova realnih brojeva kojima je niz parcijalnih suma strogo rastući.

- (4) Dokažite da je kardinalnost skupa svih funkcija s \mathbb{R} u \mathbb{N} koje nisu surjekcije, jednaka $2^{\mathfrak{c}}$.

- (5) Jesu li $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ sa standardnim i $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ s antileksikografskim uređajem slični? Obrazložite odgovor.

- (6) Detaljno raspišite $(\omega \cdot 3 + 2)^{\omega+2}$.

- (7) Izračunajte

$$\prod_{i \in 4} (i^{2 \cdot i^\omega} + i) .$$

- (8) Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dokažite da postoji maksimalan skup $S \subseteq M_n(\mathbb{C})$ koji je zatvoren na zbrajanje i množenje, te disjunktan sa skupom svih dijagonalnih matricâ reda n .

Napomene:

- Svaki zadatak pišite na posebnom papiru.
- Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.

Teorija skupova – popravni kolokvij
TEORIJSKI DIO

- (1) Definirajte sljedeće pojmove:
 - (a) (1 bod) neprebrojiv skup
 - (b) (1 bod) simetrična relacija
 - (c) (1 bod) infimum podskupa parcijalno uređenog skupa
 - (d) (1 bod) induktivan skup
 - (e) (1 bod) granični ordinalni broj
 - (f) (1 bod) kardinalni broj
- (2) Iskažite sljedeće tvrdnje, odnosno aksiome:
 - (a) (1 bod) osnovni Cantorov teorem teorije skupova
 - (b) (1 bod) aksiom beskonačnosti
 - (c) (1 bod) princip transfinitne indukcije
 - (d) (1 bod) teorem enumeracije
 - (e) (1 bod) Cantorova hipoteza kontinuuma
 - (f) (1 bod) aksiom izbora
- (3) (4 boda) Neka je A neprebrojiv skup i $B \subseteq A$ prebrojiv. Dokažite da vrijedi $A \setminus B \sim B$.
- (4) (4 boda) Dokažite da je presjek dva ordinalna broja također ordinalni broj.

Teorija skupova – popravni kolokvij
ZADACI

- (1) Neka su A , B i C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos između skupova

$$C \setminus (B \Delta A) \quad \text{i} \quad A \setminus (B \cap C).$$

Ispitajte inkluzije i disjunktnost. Dokažite svoje tvrdnje.

- (2) Neka su R i S relacije ekvivalencije na skupu A , takve da vrijedi $R \circ S = S \circ R$. Dokažite da je $S \circ R$ također relacija ekvivalencije na A .

- (3) Odredite kardinalnost skupa svih nizova racionalnih brojeva kojima je skup prirodnih brojeva podskup slike.

- (4) Dokažite da je kardinalnost skupa svih funkcija s \mathbb{C} u \mathbb{Q} koje nisu surjekcije, jednaka $2^{\mathfrak{c}}$.

- (5) Jesu li $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ sa standardnim i $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ s antileksikografskim uređajem slični? Obrazložite odgovor.

- (6) Detaljno raspišite $(\omega \cdot 2 + 2)^{\omega+2}$.

- (7) Izračunajte

$$\prod_{i \in 4} (i^{i \cdot \omega} + i \cdot 2).$$

- (8) Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dokažite da postoji maksimalan skup $S \subseteq M_n(\mathbb{C})$ koji je zatvoren na zbrajanje i množenje, te disjunktan sa skupom svih gornjetrokutastih matricâ reda n .

Napomene:

- Svaki zadatak pišite na posebnom papiru.
- Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.