Teorija skupova
Popravni kolokvij
9. rujna 2008.

Teorijski dio

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) konačan skup
   (b) (1 bod) tranzitivna relacija
   (c) (1 bod) supremum podskupa parcijalno uređenog skupa
   (d) (1 bod) dobro uređen skup
   (e) (1 bod) ordinalni broj
   (f) (1 bod) kardinalni broj skupa
2. Iskažite sljedeće tvrdnje, odnosno aksiome:
   (a) (1 bod) Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem
   (b) (1 bod) aksiom partitivnog skupa
   (c) (1 bod) teorem o uređanoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$
   (d) (1 bod) dva svojstva dobro uređenih skupova
   (e) (1 bod) Dedekindov teorem rekurzije
   (f) (1 bod) Zornova lema
3. (4 boda) Dokažite $\mathbb{R} \not\sim \mathbb{N}$.
4. (4 boda) Dokažite da klasa svih ordinalnih brojeva nije skup.

Zadaci

Svaki zadatak vrijedi 5 bodova.

1. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$C \setminus (B \setminus A) \qquad \text{i} \qquad (A \cap B) \cup (C \setminus B)\ .$$

   Inkluzije koje vrijede dokažite, za one koje ne vrijede nađite kontraprimjer.

2. Dokažite da je kardinalnost skupa realnih brojeva čiji je razlomljeni dio veći od $\frac{1}{2}$ jednaka c.

3. Dokažite da je kardinalnost skupa funkcija sa $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{Z}$ koje nisu ni rastuće ni padajuće ni injekcije jednaka c.

4. Dokažite da je postojanje minimalnog elementa invarijanta sličnosti.

5. Koji su od skupova $\mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$, $\mathbb{Q}^+$, $\langle 0, 1\rangle$ slični, a koji nisu? Obrazložite!

6. Izračunajte i sve korake obrazložite:

$$5^{5+\omega\cdot 5+1}\ .$$

7. Izračunajte

$$\sum_{i\in\omega\cdot 2} i\ .$$

8. Za neprazan podskup B od $\mathbb{R}$ kažemo da je balansiran ako za sve $x, y \in B$ vrijedi $(x + y)/2 \in B$. Dokažite da postoji maksimalan balansiran podskup od $\mathbb{R}$ koji je disjunktan sa $\mathbb{Q}$.

Teorija skupova
Popravni kolokvij
9. rujna 2008.

Teorijski dio

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) prebrojiv skup
   (b) (1 bod) antisimetrična relacija
   (c) (1 bod) minimalni element parcijalno uređenog skupa
   (d) (1 bod) lanac u pracijalno uređenom skupu
   (e) (1 bod) prirodan broj
   (f) (1 bod) kardinalni broj
2. Iskažite sljedeće tvrdnje, odnosno aksiome:
   (a) (1 bod) Knaster, Tarskijev teorem
   (b) (1 bod) aksiom ekstenzionalnosti
   (c) (1 bod) prinicip transfinitne indukcije
   (d) (1 bod) dva svojstva kardinalnih brojeva
   (e) (1 bod) teorem enumeracije
   (f) (1 bod) Hausdorffov princip maksimalnosti
3. (4 boda) Dokažite da vrijedi $c + c = c$.
4. (4 boda) Dokažite da za svaki dobro uređen skup vrijedi princip transfinitne indukcije.

Zadaci

Svaki zadatak vrijedi 5 bodova.

1. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos skupova
$$(B \setminus A) \cup (A \cap B) \qquad \text{i} \qquad B \setminus (A \setminus C)\ .$$
Inkluzije koje vrijede dokažite, za one koje ne vrijede nađite kontraprimjer.

2. Dokažite da je kardinalnost skupa realnih brojeva čiji je cjelobrojni dio paran jednaka c.

3. Dokažite da je kardinalnost skupa injekcija s $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ koje nisu ni rastuće ni padajuće jednaka c.

4. Dokažite da je postojanje najmanjeg elementa invarijanta sličnosti.

5. Koji su od skupova $\mathbb{R} \setminus \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$, $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, $\langle 0, +\infty \rangle$ slični, a koji nisu? Obrazložite!

6. Izračunajte i sve korake obrazložite:
$$3^{3\cdot\omega\cdot 3+3}\ .$$

7. Izračunajte
$$\sum_{i\in\omega+3} (i\cdot\omega + \omega\cdot i)\ .$$

8. Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da je putevima povezan ako za svake dvije njegove točke x i y postoji neprekidna funkcija $f : [0,1] \to A$ takva da je $f(0) = x$ i $f(1) = y$. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^2$ proizvoljan. Dokažite da postoji maksimalan putevima povezan podskup od X.