Teorija skupova

Drugi kolokvij — 6. veljače 2023. godine

Zadatak 1. *(6 bodova)*

(a) Definirajte skup racionalnih brojeva (pomoću skupa cijelih brojeva) i uređaj na njemu.

(b) Neka je $(a, <)$ totalno uređen skup, te $b \subseteq a$. Definirajte pojam: b gust u a. Definirajte separabilan skup.

(c) Definirajte tranzitivan skup.

(d) Iskažite Hartogsov teorem.

(e) Definirajte kardinalni broj.

(f) Iskažite Zornovu lemu.

Zadatak 2. *(4 boda)* Dokažite da za svaki skup postoji jedinstveni kardinalni broj koji je ekvipotentan s njim.

Zadatak 3. *(7 = 2 + 2.5 + 2.5 bodova)* U ovome zadatku s $\prec$ označavamo antileksikografski uređaj, a s $<$ označavamo standardni uređaj.

(a) Dokažite ili opovrgnite: $(\langle -2023, 2023\rangle \times \mathbb{Q}, \prec)$ i $([0, 2023\rangle \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}), \prec)$ nisu slični.

(b) Dokažite: ako je funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sličnost, tada je f translacija (tj. postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da za svaki $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $f(x) = x + k$).

(c) Neka je $(X, \sqsubset)$ neki totalno uređen skup koji je lokalno konačan, beskonačan i ima najveći element. Je li taj skup sličan skupu $(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, <)$? Dokažite!

Zadatak 4. *(4 boda)* Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi

$$\sum_{i \in \omega} \left(\sum_{j \in \omega \cdot (i+1)} \omega \cdot (j + 7) \right).$$

Zadatak 5. *(4 boda)* Za $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da je konveksan ako za proizvoljne $x, y \in K$ te proizvoljan $t \in [0, 1]$ vrijedi da je $(x + t(y - x)) \in K$. Dokažite da postoji maksimalan konveksan podskup od $\mathbb{R}^2$ koji ne siječe niti jednu zatvorenu kuglu sa središtem iz $\mathbb{Z}^2$ i radijusom $\frac{1}{2}$.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire! Zadatke (1) i (2) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (3), (4) i (5) morate na zasebnom! Potpišite sve papire koje predajete! Sretno!