Teorija skupova

Drugi kolokvij — 6. veljače 2023. godine

Zadatak 3. *(7 = 2 + 2.5 + 2.5 bodova)* U ovome zadatku s $\prec$ označavamo antileksikografski uređaj, a s $<$ označavamo standardni uređaj.

(a) Dokažite ili opovrgnite: $(\langle -2023, 2023\rangle \times \mathbb{Q}, \prec)$ i $([0, 2023\rangle \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}), \prec)$ nisu slični.

(b) Dokažite: ako je funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sličnost, tada je f translacija (tj. postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da za svaki $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $f(x) = x + k$).

(c) Neka je $(X, \sqsubset)$ neki totalno uređen skup koji je lokalno konačan, beskonačan i ima najveći element. Je li taj skup sličan skupu $(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, <)$? Dokažite!

Rješenje. (a) Označimo $A := (\langle -2023, 2023\rangle \times \mathbb{Q}, \prec)$ i $B := ([0, 2023\rangle \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}), \prec)$. Koristeći da je separabilnost invarijanta sličnosti, pokazujemo da A i B nisu slični tako što pokažemo da je A separabilan, dok B to nije. (0.5b)

- A je separabilan jer je skup $(\langle -2023, 2023\rangle \times \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ prebrojiv podskup od A koji je gust u A. (0.5b)
- B nije separabilan:

  Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $B' \subseteq B$ koji je prebrojiv i gust u B, tj.

  $$(\forall a, b \in B)(a \prec b \Rightarrow (\exists c \in B')(a \prec c \prec b)).$$

  Tada za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ postoji $c \in B'$ takav da vrijedi $(0, x) \prec c \prec (1, x)$, iz čega slijedi (jer za svaka dva različita $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ su pripadni odabrani c_1, c_2 različiti) $k(B) \geq k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = \mathfrak{c}$. No, to je u kontradikciji s pretpostavkom da je B prebrojiv. (1b)

(b) (Istaknimo da je ovo zadatak 158. u trenutnoj verziji zbirke.)

Označimo $k := f(0) \in \mathbb{Z}$.

Indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ dokazujemo da vrijedi $f(n) = n + k$. (1b)

(baza) $f(0) = k = 0 + k$ ✓

(pretp) Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(n) = n + k$.

(korak) Iz $n < n + 1$ i pretpostavke da je f sličnost (pa čuva uređaj) slijedi $f(n) < f(n + 1)$. Vrijedi $f(n), f(n + 1) \in \mathbb{Z}$ pa prethodno povlači

$$f(n + 1) \geq f(n) + 1 = (\text{pretp. ind.}) = n + k + 1 > n + k = f(n)$$

Primjenom pretpostavke da i f^{-1} čuva uređaj dobili smo $n+1 \geq f^{-1}(n+k+1) > n$, pa (kako se radi o cijelim brojevima) slijedi $f^{-1}(n + k + 1) = n + 1$, tj. $f(n + 1) = n + 1 + k$. ✓ (1b)

Na isti način se indukcijom po $m \in \mathbb{N}$ pokazuje $f(-m) = -m + k$. Dakle, za sve $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $f(x) = x + k$. (0.5b)

(c) Pokazujemo $(X, \sqsubset) \simeq (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$.

- Pokažimo da je $(X, \sqsupset)$ početno konačan:

  Neka je $a \in X$ proizvoljan. Po definiciji vrijedi $p_{(X,\sqsupset)}(a) = \{b \in X \mid b \sqsupset a\}$. Neka je $b \in p_{(X,\sqsupset)}(a)$ proizvoljan. Tada vrijedi $b \in X$, a kako po pretpostavci postoji $c \in X$ koji je najveći u $(X, \sqsubset)$ slijedi $b \sqsubset c$. Iz $b \in p_{(X,\sqsupset)}(a)$ slijedi i $b \sqsupset a$, tj. $a \sqsubset b$, pa smo ukupno dobili $a \sqsubset b \sqsubset c$, tj. $b \in [a, c]$. Dakle, $p_{(X,\sqsupset)}(a) \subseteq [a, c]$. Sad lokalna konačnost od X povlači da je skup $p_{(X,\sqsupset)}(a)$ konačan. (1b)

Dakle, $(X, \sqsupset)$ je početno konačan i beskonačan, pa po uređajnoj karakterizaciji od $(\mathbb{N}, <)$ slijedi $(X, \sqsupset) \simeq (\mathbb{N}, <)$. (0.5b)

Označimo neku sličnost među njima s $f : X \to \mathbb{N}$. Definiramo $g : X \to \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ s $g(x) = -f(x) - 1$. Kako bismo pokazali da je g tražena sličnost iz zadatka, dovoljno je pokazati da je g surjekcija na $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ te da g čuva uređaj. (0.5b)

- Neka je $y \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada je $-y - 1 \in \mathbb{N}$, pa kako je $f : X \to \mathbb{N}$ bijekcija slijedi da postoji $x \in X$ takav da vrijedi $f(x) = -y - 1$. Tada vrijedi $y = -f(x) - 1 = g(x)$.
- Neka su $a, b \in X$ takvi da vrijedi $a \sqsubset b$. Tada vrijedi $b \sqsupset a$ iz čega slijedi (jer f čuva uređaj) $f(b) < f(a)$. Iz toga dobivamo $-f(a) - 1 < f(b) - 1$, tj. $g(a) < g(b)$.

(0.5b)

■