Teorija skupova — drugi kolokvij

3. veljače 2022.

1. (a) [1 bod] Definirajte ordinal.
   Navedite primjer beskonačnog ordinala koji nije granični.
   (b) [1 bod] Što je izborna funkcija? Iskažite aksiom izbora.
   (c) [1 bod] Iskažite teorem o uređajnoj karakterizaciji skupa $\mathbb{Q}$, te za svako od svojstava navedite primjer skupa nesličnog s $\mathbb{Q}$ koji ima sva ostala svojstva iz karakterizacije.
   (d) [1 bod] Iskažite teorem enumeracije. Kojem ordinalu, ako ikojem, je sličan $\mathbb{N} \times \{3, 4\}$ (uređen antileksikografski)?
   (e) [1 bod] Definirajte kumulativnu hijerarhiju.
   Koji aksiomi se koriste za izgradnju pojedinih razina?
   (f) [1 bod] Definirajte skup $\mathbb{Z}$ i množenje na njemu.

2. [4 boda] Neka je $(a, <)$ dobro uređen skup, i b skup takav da za sve $x \in a$, svojstvo $p_a(x) \subseteq b$ povlači $x \in b$. Dokažite $a \subseteq b$.

---

3. [6 bodova] Za element totalno uređenog skupa kažemo da je *gomilište* ako nema ni neposrednog prethodnika ni neposrednog sljedbenika.
   (a) Dokažite da su skupovi gomilišta sličnih totalno uređenih skupova slični.
   (b) Neka je $S := \{0\} \cup \left\{\frac{1}{x} : x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$
   (s uređajem naslijeđenim od $\mathbb{Q}$). Ispitajte jesu li skupovi
   $$S \times \mathbb{N} \quad \text{i} \quad S \times \mathbb{Z}\,,$$
   uređeni antileksikografski, međusobno slični.
   (c) Koliko najviše gomilišta može imati dobro uređen skup? Obrazložite!

4. [4 boda] Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi
   $$\sum_{i \in \omega \cdot 2 + 2} (\omega + i)^2.$$

5. [5 boda] Neka je $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}$.
   Dokažite da postoji maksimalni neprazni skup **uzastopnih** indeksa $I \subseteq \mathbb{N}$ sa svojstvom da za sve $i, j \in I$ takve da je $i < j$, vrijedi $x_i < x_j$ (tj. x je rastuća funkcija na I).