

# Teorija skupova

## Drugi kolokvij

10. veljače 2021.

- (1) (a) (1 bod) Kako zovemo skup  $a$  za koji vrijedi  $b \in a \Rightarrow b \subset a$ ?  
Koliko ima skupova za koje vrijedi obrat?
- (b) (1 bod) Može li se pomoću Dedekindovog teorema rekurzije dobiti da je klasa  $\{(n, V_n) : n \in \omega\}$  skup? Ako da, kako? Ako ne, zašto? (Jedna rečenica.)
- (c) (1 bod) Nabrojite svojstva potrebna za uređajnu karakterizaciju skupa  $\mathbb{Q}$ . Pored svakog od njih navedite primjer TUSA koji zadovoljava sva svojstva osim tog.
- (d) (1 bod) Definirajte klasnu funkciju  $\mathbf{F}$  koja definira kumulativnu hijerarhiju pomoću općeg teorema rekurzije.
- (e) (1 bod) Precizno definirajte Kartezijev produkt niza skupova  $(A_n : n \in \omega)$ .  
Koje aksiome treba koristiti za dokaz da je to skup?
- (f) (1 bod) Neka je  $T$  prebrojiva familija (ne indeksirana!) konačnih skupova.  
Može li  $\bigcup T$  biti (i) prazna, (ii) konačna, (iii) prebrojiva, (iv) neprebrojiva?
- (2) (4 boda) Definirajte i opravdajte funkcijsku oznaku  $\text{card } a$  (kardinalni broj skupa  $a$ ).
- (3) (4 boda) Za svaki par navedenih antileksikografski uređenih skupova dokažite ili opovrgnite njihovu sličnost.

$$\langle 0, 1 \rangle \times \mathbb{N}, \quad [0, 1) \times \mathbb{Z}, \quad [0, 1] \times \mathbb{Q}, \quad [0, 1] \times \mathbb{R}$$

- (4) (3 boda) Neka je  $(A, <)$  TUS. Za  $B \subseteq A$  kažemo da je *indukcijski* ako vrijedi
- $$(\forall a \in A)(p_A(a) \subseteq B \Rightarrow a \in B).$$

Dokažite: ako je  $A$  jedinstveni indukcijski podskup od  $A$ , onda je  $A$  dobro uređen.

- (5) (4 boda) Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi

$$\sum_{i \in \omega \cdot 3} (i + \omega)^i.$$

- (6) (4 boda) Neka je  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Za  $S \subseteq \mathbb{R}$  kažemo da je *k-balansiran* ako za sve  $x_1, x_2, \dots, x_k \in S$  vrijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} \in S.$$

Dokažite da postoji maksimalan (u smislu inkluzije) neprazan  $k$ -balansiran podskup od  $\mathbb{R}$  koji ne sadrži nikoja dva uzastopna cijela broja.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1) i (2) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (3), (4), (5) i (6) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!

**Rezultati:**