Teorija skupova

Drugi kolokvij, grupa A

31. 01. 2020.

(1) Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:

(a) (1 bod) minimalni element u parcijalno uređenom skupu, te navedite primjer parcijalno uređenog skupa koji ima jedinstveni minimalni element, a nema najmanji element;

(b) (1 bod) cijeli broj -3, te navedite 3 njegova elementa;

(c) (1 bod) tranzitivni skup, te navedite primjer tranzitivnog skupa koji nije ordinalni broj.

(2) Iskažite sljedeće tvrdnje:

(a) (1 bod) Zornova lema;

(b) (1 bod) teorem o fiksnoj točki;

(c) (1 bod) shema aksioma zamjene.

(3) (4 boda) Definirajte dijeljenje racionalnih brojeva. Dokažite neovisnost o izboru reprezentanata u toj definiciji (pretpostavljamo da su dokazana osnovna svosjtva zbrajanja i množenja cijelih brojeva).

Zadaci (svaki na svoj papir)

(4) (5 bodova) Jesu li skupovi

$$[0,1] \times ([-1,1] \setminus \{0\}) \quad \text{i} \quad [-1,1] \times \left([0,1] \setminus \{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\}\right)$$

slični (uz antileksikografski uređaj)? Dokažite!

(5) (5 bodova) Dokažite da je svaki lokalno konačan totalno uređen skup sličan nekom podskupu od $\mathbb{Z}$. (Za totalno uređen skup $(X, \prec)$ kažemo da je *lokalno konačan* ako je za sve $a, b \in X$ skup $\{x \in X \mid a \preceq x \preceq b\}$ konačan.)

(6) (5 bodova) Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi:

$$\prod_{i \in \omega+1} \left(\sum_{j \in i} (\omega + 3)^j + 4 \right)$$

(7) (5 bodova) Za nepraznu familiju skupova $\mathcal{A}$ kažemo da ima *svojstvo konačnih presjeka* ako je svaki presjek konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{A}$ neprazan. Dokažite da u $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ postoji maksimalna familija sa svojstvom konačnih presjeka koja ne sadrži nijedan jednočlan skup.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1), (2) i (3) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (4), (5), (6) i (7) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!

Teorija skupova

Drugi kolokvij, grupa B

31. 01. 2020.

(1) Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:

(a) (1 bod) gornja međa podskupa parcijalno uređenog skupa, te navedite primjer parcijalnog uređenog skupa koji sadrži podskup za koji postoji gornja međa ali ne postoji supremum;

(b) (1 bod) racionalni broj $\frac{2}{3}$, te navedite 3 njegova elementa.

(c) (1 bod) kardinalni broj, te odredite $k(\omega \cdot 3)$ i $k(\omega \cdot \omega)$;

(2) Iskažite sljedeće tvrdnje:

(a) (1 bod) teorem o usporedivosti dobro uređenih skupova;

(b) (1 bod) shema aksioma zamjene;

(c) (1 bod) Zermelov teorem.

(3) (4 boda) Definirajte oduzimanje cijelih brojeva. Dokažite neovisnost o izboru reprezentanata u toj definiciji (pretpostavljamo da su dokazana osnovna svojstva zbrajanja i množenja prirodnih brojeva).

Zadaci (svaki na svoj papir)

(4) (5 bodova) Jesu li skupovi

$$[-1,1] \times \left([0,1] \setminus \{\tfrac{1}{2}\}\right) \qquad \text{i} \qquad [0,1] \times \left([-1,1] \setminus \{-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\}\right)$$

slični (uz antileksikografski uređaj)? Dokažite!

(5) (5 bodova) Dokažite da je svaki lokalno konačan totalno uređen skup sličan nekom podskupu od $\mathbb{Z}$. (Za totalno uređen skup $(X, \prec)$ kažemo da je *lokalno konačan* ako je za sve $a, b \in X$ skup $\{x \in X \mid a \preceq x \preceq b\}$ konačan.)

(6) (5 bodova) Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi:

$$\prod_{i \in \omega+1} \left(\sum_{j \in i} (\omega + 5)^j + 2 \right)$$

(7) (5 bodova) Za nepraznu familiju skupova $\mathcal{B}$ kažemo da ima *svojstvo konačnih presjeka* ako je svaki presjek konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{B}$ neprazan. Dokažite da u $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ postoji maksimalna familija sa svojstvom konačnih presjeka koja ne sadrži nijedan dvočlani skup.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1), (2) i (3) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (4), (5), (6) i (7) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!