Teorija skupova

Drugi kolokvij, grupa A

01. 02. 2019.

(1) Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:

(a) (1 bod) antileksikografski uređaj na Kartezijevom produktu konačno mnogo skupova, te navedite primjer parcijalno uređenih skupova A i B tako da vrijedi $A \times B \not\simeq B \times A$ (s antileksikografskim uređajem).

(b) (1 bod) prirodan broj, te navedite tri primjera beskonačnih skupova koji nisu prirodni brojevi;

(c) (1 bod) kardinalni broj.

(2) Iskažite sljedeće tvrdnje:

(a) (1 bod) prinicip transfinitne indukcije, te navedite primjer linearno uređenog skupa za koji ne vrijedi princip transfinitne indukcije;

(b) (1 bod) tri posljedice aksioma dobre utemeljenosti;

(c) (1 bod) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati):
- (i) Svaki prirodni broj je dobro uređen skup.
- (ii) Skup $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je sličan s $\mathbb{R}$.
- (iii) Teorem enumeracije omogućava definiciju ordinalnog broja proizvoljnog dobro uređenog skupa.

(3) (4 boda) Dokažite da klasa svih ordinalnih brojeva nije skup.

Zadaci (svaki na svoj papir)

(4) (5 bodova) Odredite linearan uređaj $\prec$ na skupu $\mathbb{Z} \times ([-1, 1\rangle \cap \mathbb{Q})$ tako da vrijedi

$$(\mathbb{Q}, <) \simeq (\mathbb{Z} \times ([-1, 1\rangle \cap \mathbb{Q}), \prec).$$

Eksplicitno zapišite neku sličnost između gornjih linearno uređenih skupova.

(5) (5 bodova) Ako je $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ takav da je $(X, \subset)$ dobro uređen skup, dokažite da je X prebrojiv ili konačan.

(6) (5 bodova) Odredite Cantorovu normalnu formu:

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2} \prod_{j \in i} (3^j + \omega)$$

(7) (5 bodova) Kažemo da je skup $A \subseteq \mathbb{R}$ *ovogodišnji* ako za svaki konačan podskup $B \subseteq A$ vrijedi $\sum_{b \in B} b \in [0, 2019]$. Dokažite ili opovrgnite: svaki ovogodišnji skup je podskup nekog maksimalnog ovogodišnjeg skupa.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1), (2) i (3) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (4), (5), (6) i (7) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!

Teorija skupova

Drugi kolokvij, grupa B

01. 02. 2019.

(1) Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:
   (a) (1 bod) leksikografski uređaj na Kartezijevom produktu konačno mnogo skupova, te navedite primjer linearno uređenih skupova A i B tako da vrijedi $A \times B \not\simeq B \times A$ (s leksikografskim uređajem).
   (b) (1 bod) dobro utemeljeni parcijalno uređeni skup, te nevedite jedan primjer parcijalno uređenog skupa koji nije dobro utemeljen;
   (c) (1 bod) induktivan skup, te navedite primjer beskonačnog skupa koji nije induktivan.

(2) Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) (1 bod) Dedekindov teorem rekurzije;
   (b) (1 bod) tri svojstva dobro uređenih skupova;
   (c) (1 bod) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati):
      (i) Svaki tranzitivni skup je prirodni broj.
      (ii) Skup svih algebarskih brojeva je sličan s $\mathbb{Q}$.
      (iii) Zornova lema povlači Zermelov teorem o dobrom uređaju.

(3) (4 boda) Dokažite da je unija dva ordinalna broja također ordinalni broj.

Zadaci (svaki na svoj papir)

(4) (5 bodova) Odredite linearan uređaj $\prec$ na skupu $([-1,1\rangle \cap \mathbb{Q}) \times \mathbb{Z}$ tako da vrijedi

$$(\mathbb{Q}, >) \simeq (([-1,1\rangle \cap \mathbb{Q}) \times \mathbb{Z}, \prec).$$

Eksplicitno zapišite neku sličnost između gornjih linearno uređenih skupova.

(5) (5 bodova) Neka je $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ako je X dobro uređen relacijom $\subset$, dokažite da je X prebrojiv ili konačan.

(6) (5 bodova) Odredite Cantorovu normalnu formu:

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2} \prod_{j \in i} (5^j + \omega)$$

(7) (5 bodova) Kažemo da je skup $A \subseteq \mathbb{Q}$ *ovogodišnji* ako za svaki konačan podskup $B \subseteq A$ vrijedi $\prod_{b \in B} b \in [0, 2019]$. Dokažite ili opovrgnite: svaki ovogodišnji skup je podskup nekog maksimalnog ovogodišnjeg skupa.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1), (2) i (3) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (4), (5), (6) i (7) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!