Teorija skupova

Drugi kolokvij, grupa A

02. 02. 2018.

(1) Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:

(a) (1 bod) minimalni element u parcijalno uređenom skupu, te navedite primjer parcijalno uređenog skupa koji ima jedinstveni minimalni element, a nema najmanji element;

(b) (1 bod) tranzitivni skup, te navedite tri primjera skupa koji nisu tranzitivni;

(c) (1 bod) skupovna operacija $\aleph$ na klasi svih ordinalnih brojeva.

(2) Iskažite sljedeće tvrdnje:

(a) (1 bod) teorem o usporedivosti dobro uređenih skupova;

(b) (1 bod) aksiom beskonačnosti;

(c) (1 bod) Russellov multiplikativni aksiom.

(3) (4 boda) Neka je $(A, <)$ konačan parcijalno uređen skup. Dokažite da za svaki lanac u A postoji supremum.

Zadaci (svaki na svoj papir)

(4) (5 bodova) Jesu li $[0, 1\rangle \times \mathbb{Q}$ i $[0, 1\rangle \times \mathbb{R}$ slični? Obrazložite!

(5) (5 bodova) Dokažite da ako u beskonačnom dobro uređenom skupu svaki element osim najmanjeg ima *neposrednog prethodnika*, tada je taj skup sličan s $\mathbb{N}$.
(U totalno uređenom skupu $(X, <)$, kažemo da je x neposredni prethodnik od y ako je $x < y$ i ne postoji $z \in X$ takav da je $x < z < y$.)

(6) (5 bodova) Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi:

$$\prod_{i \in 17} \left[\sum_{j \in i+1} \left(\sum_{k \in j+1} \omega^{k+1} \right) \right].$$

(7) (5 bodova) Neka je $(S, <)$ parcijalno uređen skup koji nije totalno uređen. Dokaži da postoji $A \subseteq S$ koji je totalno uređen i koji ima svojstvo da za sve $b \in S \setminus A$ postoji $a \in A$ takav da a i b nisu usporedivi.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire! Potpišite sve papire koje predajete!

Teorija skupova

Drugi kolokvij, grupa B

02. 02. 2018.

(1) Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:
   (a) (1 bod) maksimalni element u parcijalno uređenom skupu, te navedite primjer parcijalno uređenog skupa koji ima jedinstveni maksimalni element, a nema najveći element;
   (b) (1 bod) potenciranje ordinalnih brojeva;
   (c) (1 bod) kardinalni broj proizvoljnog skupa, te odredite $k(\omega\cdot\omega+1)$ i $k(\omega^\omega+1)$.

(2) Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) (1 bod) teorem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$;
   (b) (1 bod) aksiom dobre utemeljenosti;
   (c) (1 bod) Hausdorffov princip maksimalnosti.

(3) (4 boda) Dokažite da je dobra uređenost invarijanta sličnosti.

ZADACI (SVAKI NA SVOJ PAPIR)

(4) (5 bodova) Jesu li $\langle 0,1] \times \mathbb{Q}$ i $\langle 0,1] \times \mathbb{R}$ slični? Obrazložite!

(5) (5 bodova) Ako su a i b elementi totalno uređenog skupa $(A,<)$, kažemo da je a *neposredni prethodnik* od b ako je $a < b$ i ne postoji $c \in A$ takav da vrijedi $a < c < b$. Dokažite da ako u beskonačnom dobro uređenom skupu svaki element osim najmanjeg ima neposrednog prethodnika, tada je taj skup sličan s $\mathbb{N}$.

(6) (5 bodova) Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi:

$$\prod_{i\in 19}\left[\sum_{j\in i+1}\left(\sum_{k\in j+1}\omega^{k+1}\right)\right].$$

(7) (5 bodova) Zadan je parcijalno uređen skup $(T,<)$ za koji znamo da nije totalno uređen. Dokaži da postoji $B \subseteq T$ koji je totalno uređen i za koji vrijedi da za sve $x \in T \setminus B$ postoji $b \in B$ takav da x i b nisu usporedivi.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire! Potpišite sve papire koje predajete!