Teorija skupova

Drugi kolokvij, grupa A

29. siječnja 2016.

(1) Definirajte sljedeće pojmove:
  (a) (1 bod) supremum podskupa parcijalno uređenog skupa;
  (b) (1 bod) množenje ordinalnih brojeva;
  (c) (1 bod) kardinalni broj proizvoljnog skupa, te odredite $k(\omega+1)$ i $k(\omega^\omega)$.

(2) Iskažite sljedeće tvrdnje:
  (a) (1 bod) teorem o uređanoj karakteristici skupa $\mathbb{R}$;
  (b) (1 bod) teorem enumeracije;
  (c) (1 bod) Zornova lema.

(3) (4 boda) Dokažite da je svaki tranzitivan skup ordinalnih brojeva jedan ordinalni broj.

Zadaci (svaki na svoj papir)

(4) (5 bodova) Jesu li skupovi

$$[0,1] \times \mathbb{Z} \qquad \text{i} \qquad \langle 0,1 \rangle \times \mathbb{Z}$$

slični? Obrazložite odgovor.

(5) (5 bodova) Navedite primjer totalno uređenog skupa koji nije dobro uređen, ali nije sličan nijednom podskupu svojeg početnog komada. Dokažite da ima to svojstvo.

(6) (5 bodova) Usporedite ordinale

$$\alpha = \prod_{n \in \omega+1} \sum_{i \in \omega} i^n \qquad \text{i} \qquad \beta = 2^{(\omega+1)\cdot\omega}.$$

(7) (5 bodova) Dokažite da postoji bojanje točaka ravnine ($\mathbb{R}^2$) takvo da:
  (a) Svaka točka ravnine je obojana ili u crvenu ili u zelenu boju,
  (b) Ne postoji pravac u ravnini koji prolazi kroz više od 2016 crvenih točaka,
  (c) Svakom zelenom točkom prolazi barem jedan pravac koji sadrži 2016 crvenih točaka.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1), (2) i (3) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (4), (5), (6) i (7) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!

Teorija skupova

Drugi kolokvij, grupa B

29. siječnja 2016.

(1) Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) infimum podskupa parcijalno uređenog skupa ;
   (b) (1 bod) zbrajanje ordinalnih brojeva;
   (c) (1 bod) kardinalni broj, te odredite $k(\omega \cdot 3)$ i $k(\omega \cdot \omega)$;

(2) Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) (1 bod) teorem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$;
   (b) (1 bod) aksiom beskonačnosti;
   (c) (1 bod) Zornova lema.

(3) (4 boda) Dokažite da za svaka dva ordinalna broja α i β vijedi: $\alpha \leq \beta$ ili $\beta \leq \alpha$.

ZADACI (SVAKI NA SVOJ PAPIR)

(4) (5 bodova) Jesu li skupovi

$$[0,1] \times \mathbb{Z} \qquad \text{i} \qquad \langle 0,1 \rangle \times \mathbb{N}$$

slični? Obrazložite odgovor.

(5) (5 bodova) Navedite primjer totalno uređenog skupa koji nije dobro uređen, ali nije sličan nijednom podskupu svojeg početnog komada. Dokažite da ima to svojstvo.

(6) (5 bodova) Usporedite ordinale

$$\alpha = (\omega + 2)^{\omega} \qquad \text{i} \qquad \beta = \sum_{i \in \omega + 1} \prod_{n \in \omega} (n+i)^n.$$

(7) (5 bodova) Dokažite da postoji bojanje točaka ravnine ($\mathbb{R}^2$), u žutu i plavu boju, takvo da:
   (a) Na svakom pravcu u ravnini nalazi se najviše 2016 plavih točaka,
   (b) Kroz svaku žutu točku prolazi barem jedan pravac na kojemu se nalazi 2016 plavih točaka,
   (c) Svaka točka ravnine je obojana u neku od boja (žutu ili plavu).

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1), (2) i (3) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (4), (5), (6) i (7) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!