# Teorija skupova

drugi kolokvij, grupa A

26. siječnja 2015.

## Teorijska pitanja (sva na jedan papir)

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) induktivan skup i prirodan broj;
   (b) (1 bod) kardinalni broj proizvoljnog skupa;
   (c) (1 bod) skupovna operacija $\aleph$ na klasi svih ordinalnih brojeva.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) (1 bod) Dedekindov teorem rekurzije;
   (b) (1 bod) teorem o usporedivosti dobro uređenih skupova;
   (c) (1 bod) Hausdorffov princip maksimalnosti.
3. (4 boda) Dokažite da za svaki skup $A$ postoji ordinalni broj $\alpha$ i funkcija $f : \alpha \to A$ tako da je $A = \{f(\beta) : \{\beta < \alpha\}$.

## Zadaci (svaki na svoj papir)

4. (5 bodova) Jesu li skupovi $A = \{m^8 - 6m^5 + 16 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ i $B = \{2m^4 - 13m^3 + 6 \mid m \in \mathbb{Z}\}$, uz uređaj naslijeđen od standardnog uređaja na $\mathbb{R}$, slični?
5. (5 bodova) Neka su $(A, R_A)$, $(B, R_B)$ i $(C, R_C)$ neprazni, dobro uređeni skupovi, gdje su $A$, $B$ i $C$ u parovima disjunktni skupovi, te su jedino $(A, R_A)$ i $(B, R_B)$ slični. Na skupu $X = A \cup B \cup C$ promatramo relaciju $R = R_A \cup R_B \cup R_C$. Koliko ima sličnosti sa $X$ na $X$?
6. (5 bodova) Zapiši ordinal
$$\prod_{i \in \omega+1} (\omega^2 + \omega + i)$$
   u Cantorovoj normalnoj formi.
7. (5 bodova) Dokaži da postoji maksimalan skup $S \subseteq \mathbb{Z}$, koji je disjunktan sa $7\mathbb{Z} = \{7m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, te je za sve $x,\ y$ iz $S$ $x - y \in 7\mathbb{Z}$.

# Teorija skupova

drugi kolokvij, grupa B

26. siječnja 2015.

## Teorijska pitanja (sva na jedan papir)

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) induktivan skup i prirodan broj;
   (b) (1 bod) kardinalni broj proizvoljnog skupa;
   (c) (1 bod) skupovna operacija $\aleph$ na klasi svih ordinalnih brojeva.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) (1 bod) Dedekindov teorem rekurzije;
   (b) (1 bod) teorem o usporedivosti dobro uređenih skupova;
   (c) (1 bod) Hausdorffov princip maksimalnosti.
3. (4 boda) Dokažite da za svaki skup $A$ postoji ordinalni broj $\alpha$ i funkcija $f : \alpha \to A$ tako da je $A = \{f(\beta) : \{\beta < \alpha\}$.

## Zadaci (svaki na svoj papir)

4. (5 bodova) Jesu li skupovi $A = \{8m^6 - 5m^5 + 6 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ i $B = \{m^4 - m^3 + 2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$, uz uređaj naslijeđen od standardnog uređaja na $\mathbb{R}$, slični?
5. (5 bodova) Neka su $(A, R_1)$, $(B, R_2)$ i $(C, R_3)$ neprazni, dobro uređeni skupovi, gdje su $A$, $B$ i $C$ u parovima disjunktni skupovi, te su jedino $(B, R_2)$ i $(C, R_3)$ slični. Na skupu $Y = A \cup B \cup C$ promatramo relaciju $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Koliko ima sličnosti sa $Y$ na $Y$?
6. (5 bodova) Zapiši ordinal
$$\prod_{i \in \omega+1} (\omega^2 + (\omega + i) + 5)$$
u Cantorovoj normalnoj formi.
7. (5 bodova) Dokaži da postoji maksimalan skup $S \subseteq \mathbb{Z}$, koji je disjunktan sa $11\mathbb{Z} = \{11m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, te je za sve $x,\ y$ iz $S$ $x - y \in 11\mathbb{Z}$.