Teorija skupova

drugi kolokvij

07. veljače 2014.

Teorijska pitanja (sva na jedan papir)

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) dobro uređen skup, te navedite tri primjera beskonačnih dobro uređenih skupova;
   (b) (1 bod) tranzitivan skup, te navedite tri primjera tranzitivnih skupova;
   (c) (1 bod) zbrajanje i množenje kardinalnih brojeva.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) (1 bod) teorem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$;
   (b) (1 bod) aksiom beskonačnosti;
   (c) (1 bod) Zornova lema.
3. (4 boda) Definirajte skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ te zbrajanje i množenje na tom skupu. (Pretpostavljamo da je definiran skup cijelih brojeva i operacije na na njemu).

Zadaci (svaki na svoj papir)

4. (5 bodova) Dokažite da je

   "za sve $a < b < c$ je $[a, b]$ ili $[b, c]$ konačan"

   invarijanta sličnosti. Koristeći to (ili drugačije ako želite), dokažite

   $$\pi \cdot 2 \neq \pi \cdot 3 .$$

5. (5 bodova) Transfinitnom indukcijom dokažite distributivnost množenja prema zbrajanju ordinala. Jasno naznačite sva ostala svojstva (ne morate definicije) operacija koja pritom koristite.
6. (5 bodova) Napišite Cantorovu normalnu formu za sljedeće ordinale, te ih poredajte po veličini (navedite gdje vrijede jednakosti, a gdje stroge nejednakosti):

   $$\omega^{\omega^5}, \omega^{5^\omega}, 5^{\omega^\omega}, 5^{\omega^5}, (\omega^\omega)^\omega, (\omega^\omega)^5, (\omega^5)^\omega, (5^\omega)^\omega$$

7. (5 bodova) Dokažite da postoji maksimalan (u smislu inkluzije) podskup S od $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, s bar 2 elementa, takav da za sve nizove $x, y \in S$ i sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

   $$x_n - y_n \leq n .$$