Teorija skupova
drugi kolokvij
11. siječanj 2013.

Teorijska pitanja (sva na jedan papir)

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) induktivan skup i prirodan broj;
   (b) (1 bod) granični ordinalni broj, te navedite tri primjera graničnih ordinalnih brojeva;
   (c) (1 bod) kardinalni broj proizvoljnog skupa, te odredite $k(\omega+1)$ i $k(\omega^\omega)$.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) (1 bod) Dedekindov teorem rekurzije,
   (b) (1 bod) teorem enumeracije,
   (c) (1 bod) Hausdorffov princip maksimalnosti.
3. (4 boda) Dokažite da za svaki skup ordinalnih brojeva postoji supremum.

Zadaci (svaki na svoj papir)

4. (5 bodova) Jesu li skupovi

$$(\langle 0,1] \cap \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q} \quad \text{i} \quad \mathbb{Q} \times ([0,1\rangle \cap \mathbb{Q})$$

   međusobno slični? Svoje tvrdnje dokažite.

5. (5 bodova) Neka je $(X,<)$ dobro uređen skup. Dokažite da svaka neprazna familija podskupova od X ima minimalni element s obzirom na relaciju “biti početni komad”.
6. (5 bodova) Neka je f funkcija na ordinalima zadana formulom

$$f(\alpha) := (\alpha+5)\cdot(\omega+\alpha)+\alpha\cdot\omega^2\,.$$

   Izračunajte u Cantorovoj normalnoj formi $f^4(0) = f(f(f(f(0))))$.

7. (5 bodova) Za familiju skupova $(A_i : i \in I)$ kažemo da *prekriva* skup B, ako je $B \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Dokažite da postoji maksimalna familija u parovima disjunktnih prebrojivih podskupova od $\mathbb{R}$ koja prekriva $\mathbb{Q}$.