Teorija skupova

drugi kolokvij

6. lipnja 2012.

Prvi zadatak vrijedi 6, a ostali po 4 boda.

1. (a) Definirajte sličnost parcijalno uređenih skupova.
   (b) Definirajte dobro utemeljen skup.
   (c) Definirajte kumulativnu hijerarhiju.
   (d) Iskažite aksiom beskonačnosti.
   (e) Iskažite uređajnu karakteristiku skupa $\mathbb{R}$.
   (f) Iskažite Zornovu lemu.

2. Dokažite da je svaki tranzitivan skup ordinalnih brojeva i sâm ordinalni broj. (Obrazložite pojedinosti dokaza i navedite na koje se prethodne tvrdnje pozivate.)

3. Dokažite da je

   "svaki lanac je podskup nekog beskonačnog lanca"

   invarijanta sličnosti za parcijalno uređene skupove.

4. Jesu li totalno uređeni skupovi

   $$\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \qquad \text{i} \qquad (\mathbb{R} \setminus [0,1]) \cup \mathbb{Q}$$

   (sa standardnim uređajem) slični? Obrazložite odgovor.

5. Dokažite ili opovrgnite: ako je A totalno uređen skup koji nije dobro uređen, tada postoje $b \in A$ i $B \subseteq p_A(b)$ takvi da je $A \simeq B$.

6. Izračunajte:

   $$(\omega^3 + 2)^\omega + (\omega \cdot 3 + 1) \cdot (\omega + \omega^4) \cdot 2 + (\omega^2 + 3)^2.$$

7. Dokažite da postoji maksimalni (u smislu inkluzije) neprazni podskup skupa $\mathbb{R}$ koji ne sadrži niti jedan cijeli broj i kojemu je zbroj svaka dva elementa racionalni broj.

Teorija skupova

drugi kolokvij

6. lipnja 2012.

Prvi zadatak vrijedi 6, a ostali po 4 boda.

1. (a) Definirajte tranzitivan skup.
   (b) Definirajte prirodan broj.
   (c) Definirajte kardinalni broj skupa A.
   (d) Iskažite Cantorovu hipotezu kontinuuma.
   (e) Iskažite Burali-Fortijev paradoks.
   (f) Iskažite princip transfinitne indukcije za ordinalne brojeve.

2. Dokažite da su svaka dva ordinalna broja usporediva. (Obrazložite pojedinosti dokaza i navedite na koje se prethodne tvrdnje pozivate.)

3. Dokažite da je

   "svaki lanac ima gornju među"

   invarijanta sličnosti za parcijalno uređene skupove.

4. Jesu li totalno uređeni skupovi

   $$\mathbb{Q} \cup \langle 0, 1 \rangle \qquad \text{i} \qquad \mathbb{Q} \cup \langle 0, \sqrt{2}]$$

   (sa standardnim uređajem) slični? Obrazložite odgovor.

5. Dokažite ili opovrgnite: ako je A totalno uređen skup koji nije sličan nijednom podskupu nijednog svog početnog komada, tada je A dobro uređen.

6. Izračunajte:

   $$(\omega^2 + 3)^\omega + (\omega \cdot 2 + 3) \cdot (\omega + \omega^7) \cdot 3 + (\omega^3 + 2)^2.$$

7. Dokažite da postoji maksimalni (u smislu inkluzije) neprazni podskup skupa $\mathbb{R}$ koji ne sadrži niti jedan prirodni broj i kojemu je razlika svaka dva elementa cijeli broj.