Teorija skupova

drugi kolokvij

08. lipnja 2011.

Zadaci 3–8 vrijede po 4 boda.

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) linearno uređen skup
   (b) (1 bod) potenciranje ordinalnih brojeva
   (c) (1 bod) ordinalni broj prve vrste i granični ordinalni broj
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) (1 bod) teorem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{R}$
   (b) (1 bod) shema aksioma zamjene
   (c) (1 bod) teorem Tarskog o kardinalnim brojevima
3. Neka je je α ordinalni broj i $\beta \in \alpha$. Dokažite da je tada β također ordinalni broj, te vrijedi $\beta = p_\alpha(\beta)$.
4. Je li skup $[0,1] \times [0,1]$, uređen antileksikografski, sličan s $([0,1], <)$? Obrazložite odgovor.
5. Za podskup U totalno uređenog skupa $(A, <)$ kažemo da je *otvoren* ako za svaki $x \in U$ postoje $a, b \in A$ takvi da je $a < x < b$ te takvi da je interval $\langle a, b\rangle$ sadržan u U. Dokažite da je svojstvo "postoji neprazan otvoren skup čiji je komplement neprazan i otvoren" invarijanta sličnosti. Dajte primjer jednog skupa s tim svojstvom.
6. Neka je $(A, <)$ totalno uređen skup. Za skup $B \subseteq A$ kažemo da je *kofinalan* u A ako za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da je $a \leqslant b$. Dokažite da svaki totalno uređen skup ima dobro uređen kofinalan podskup.
7. Izračunajte $(\omega \cdot 2 + 4)^{\omega+2} + (\omega^7 + 2)(\omega^2 \cdot 3 + 2 + \omega)$.
8. Dokažite da postoji maksimalan (u smislu inkluzije) neprazan podskup S od $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ takav da je $(x_1 + x_2, z_1 + z_2) \in S$ za sve $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in S$ te takav da je $S \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{C}) = \emptyset$ i $S \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \emptyset$.

Teorija skupova

drugi kolokvij

08. lipnja 2011.

Zadaci 3–8 vrijede po 4 boda.

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) parcijalno uređen skup
   (b) (1 bod) potenciranje kardinalnih brojeva
   (c) (1 bod) induktivan skup i prirodan broj

2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) (1 bod) teorem o fiksnoj točki
   (b) (1 bod) teorem enumeracije
   (c) (1 bod) Hausdorffov princip maksimalnosti

3. Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup, a $f : A \to A$ injekcija koja čuva uređaj. Dokažite da za svaki $x \in A$ vrijedi $x \leq f(x)$.

4. Je li skup ${}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ s leksikografskim uređajem, sličan s $([0, 1], <)$? Obrazložite odgovor.

5. Za totalno uređen skup $(X, <)$ kažemo da ima svojstvo P ako postoji prebrojiv podskup A od X takav da za sve $x, y, z \in X$ sa svojstvom $x < z < y$ postoje $a, b \in A$ sa svojstvom da je $a < z < b$ te $\langle a, b\rangle \subseteq \langle x, y\rangle$. Dokažite je svojstvo P invarijanta sličnosti. Dajte primjer jednog skupa sa svojstvom P.

6. Neka je $(A, <)$ totalno uređen skup. Za skup $B \subseteq A$ kažemo da je *kofinalan* u A ako za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da je $a \leqslant b$. Dokažite da svaki totalno uređen skup ima dobro uređen kofinalan podskup.

7. Izračunajte $(\omega^2 + 1)^\omega + (\omega^3 + \omega + 1)^2$.

8. Dokažite da postoji maksimalan (u smislu inkluzije) neprazan podskup S od $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ takav da je $(x_1 \cdot x_2, z_1 + z_2) \in S$ za sve $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in S$ te takav da je $S \cap (\mathbb{Z} \times T) = \emptyset$, gdje je $T = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.