Teorija skupova

drugi kolokvij

9. lipnja 2010.

Zadaci 3–8 vrijede po 4 boda.

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) najveći, najmanji, maksimalni i minimalni element parcijalno uređenog skupa
   (b) (1 bod) ordinalni broj prve vrste i granični ordinalni broj
   (c) (1 bod) kardinalni broj

2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) (1 bod) teorem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$
   (b) (1 bod) teorem o usporedivosti dobro uređenih skupova
   (c) (1 bod) Zornova lema

3. Dokažite da dobro uređen skup ne može biti sličan podskupu nekog svog početnog komada.

4. Kažemo da je linearno uređen skup *okrenut nagore* ako u njemu postoji strogo rastući niz. Dokažite (detaljno) da je okrenutost nagore invarijanta sličnosti.

5. Koji su od sljedećih linearno uređenih skupova (sa standardnim, odnosno antileksikografskim uređajima) slični, a koji nisu? Obrazložite.
   - $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^-$,
   - $(\mathbb{Q} \times \mathbb{N}) \setminus \left(\{\frac{1}{2}\} \times 2\mathbb{N}\right)$,
   - $\mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{N}$.

6. Neka je $A \subseteq [0,1]$ dobro uređen restrikcijom standardnog uređaja na $\mathbb{R}$. Može li A biti neprebrojiv? Dokažite.

7. (a) Izračunajte $(\omega+2)(\omega+3)(\omega+4)$.
   (b) Izračunajte $(\omega+1)^{\omega^2+2}$.

8. Dokažite da postoji maksimalan (u smislu inkluzije) neprazan podskup S od $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sa svojstvom da je

$$x_i - y_j \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$$

za sve $(x_i)_i, (y_j)_j \in S$ i sve $i, j \in \mathbb{N}$.

Teorija skupova

drugi kolokvij

9. lipnja 2010.

Zadaci 3–8 vrijede po 4 boda.

1. Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) (1 bod) gornja međa, donja međa, supremum i infimum podskupa parcijalno uređenog skupa
   (b) (1 bod) kardinalni broj skupa
   (c) (1 bod) zbrajanje i množenje kardinalnih brojeva

2. Iskažite sljedeće tvrdnje, odnosno aksiome:
   (a) (1 bod) princip transfinitne indukcije
   (b) (1 bod) aksiom beskonačnosti
   (c) (1 bod) aksiom izbora

3. Dokažite da je sličnost između dva dobro uređena skupa jedinstvena.

4. Kažemo da je linearno uređen skup *okrenut nadolje* ako u njemu postoji strogo padajući niz. Dokažite (detaljno) da je okrenutost nadolje invarijanta sličnosti.

5. Koji su od sljedećih linearno uređenih skupova (sa standardnim, odnosno antileksikografskim uređajima) slični, a koji nisu? Obrazložite.
   - $\mathbb{Q}^- \times \mathbb{Q}^+$,
   - $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus \big(\{5\} \times \mathbb{N}\big)$,
   - $\mathbb{Q}_0^- \times ([0,1] \cap \mathbb{Q})$.

6. Neka je $B \subseteq \mathbb{R}^+$ dobro uređen restrikcijom standardnog uređaja na $\mathbb{R}$. Može li B biti neprebrojiv? Dokažite.

7. (a) Izračunajte $(\omega + 4)(\omega + 3)(\omega + 2)$.
   (b) Izračunajte $(\omega^2 + 1)^{\omega+2}$.

8. Dokažite da postoji maksimalan (u smislu inkluzije) neprazan podskup S od $C([0,1])$ sa svojstvom da je

$$\int_0^1 \big|f(t) - g(t)\big| dt \in \mathbb{N}$$

za sve $f, g \in S$.