

# Teorija skupova – drugi kolokvij, 29. lipnja 2009.

Ime i prezime: \_\_\_\_\_ JMBAG: \_\_\_\_\_

1.

(a) Definirajte sljedeće pojmove:

- [1] i. Dobro uređen skup;
- [1] ii. Ordinalni broj;
- [1] iii. Prirodni broj.

(b) Iskažite sljedeće teoreme:

- [2] i. Torem o uređajnoj karakteristici skupa  $\mathbb{R}$ ;
- [1] ii. Torem enumeracije.

[4] (c) Definirajte skup racionalnih brojeva  $\mathbb{Q}$  te zbrajanje i množenje na tom skupu. (Pretpostavljamo da je definiran skup cijelih brojeva i operacije na njemu).

[5] 2. Neka je  $(A, <)$  konačan parcijalno uređen skup u kojem postoji jedinstveni minimalni element  $a$ . Dokažite da je  $a$  najmanji element u  $(A, <)$ . Smijete koristiti da svaki neprazni konačni parcijalno uređen skup ima bar jedan minimalni element.

[5] 3. Za linearno uređen skup kažemo da je *lokalno konačan* ako između svaka dva elementa ima samo konačno mnogo elemenata. Detaljno dokažite da je lokalna konačnost invarijanta sličnosti.

[5] 4. Izračunajte:

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2 + 4} (\omega^2 + (i + 5) \cdot \omega)$$

[5] 5. Izračunajte:

$$\prod_{i \in \omega + 3} \omega^5 \cdot (i + 5)$$

[5] 6. Za skup  $S \subseteq \mathbb{R}$  kažemo da ima *k-svojstvo* ako je neprazan i za svaka dva elementa  $x, y \in S$  postoji cijeli broj  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  takav da je  $kx + y \in \mathbb{Q}$ . Dokažite (primjenom Zornove leme) da postoji maksimalan (s obzirom na  $\subset$ ) podskup od  $\mathbb{R}$  koji je disjunktan s  $\mathbb{Q}$  i ima k-svojstvo.

## Napomene:

- Rješenje svakog zadatka pišite na poseban papir.
- Rješenje prvog zadatka mora biti na jednom papiru.
- Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.

# Teorija skupova – drugi kolokvij, 29. lipnja 2009.

Ime i prezime: \_\_\_\_\_ JMBAG: \_\_\_\_\_

1.

(a) Definirajte sljedeće pojmove:

- [1] i. Gusti skup;
- [1] ii. Induktivan skup;
- [1] iii. Tranzitivan skup.

(b) Iskažite:

- [2] i. Torem o uređajnoj karakteristici skupa  $\mathbb{Q}$ ;
- [1] ii. Aksiom beskonačnosti.

[4] (c) Definirajte skup cijelih brojeva  $\mathbb{Z}$  te zbrajanje i množenje na tom skupu. (Pretpostavljamo da je definiran skup  $\omega$  i operacije na njemu).

[5] 2. Neka je  $(A, <)$  konačan parcijalno uređen skup u kojem postoji jedinstveni minimalni element  $a$ . Dokažite da je  $a$  najmanji element u  $(A, <)$ . Smijete koristiti da svaki neprazni konačni parcijalno uređen skup ima bar jedan minimalni element.

[5] 3. Za linearno uređen skup kažemo da je *početno konačan* ako od svakog njegovog elementa u njemu postoji samo konačno mnogo manjih elemenata. Detaljno dokažite da je početna konačnost invarijanta sličnosti.

[5] 4. Izračunajte:

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2 + 3} (\omega^2 + (i + 7) \cdot \omega)$$

[5] 5. Izračunajte:

$$\prod_{i \in \omega + 3} \omega^7 \cdot (i + 7)$$

[5] 6. Za skup  $K \subseteq \mathbb{R}$  kažemo da ima *s-svojstvo* ako je neprazan i za svaka dva elementa  $x, y \in K$  postoji cijeli broj  $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  takav da je  $x - sy \in \mathbb{Q}$ . Dokažite (primjenom Zornove leme) da postoji maksimalan (s obzirom na  $\subset$ ) podskup od  $\mathbb{R}$  koji je disjunktan s  $\mathbb{Q}$  i ima s-svojstvo.

## Napomene:

- Rješenje svakog zadatka pišite na poseban papir.
- Rješenje prvog zadatka mora biti na jednom papiru.
- Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.