Teorija skupova
2. kolokvij
2. srpnja 2008.

(1) (10 bodova)

(a) Definirajte sljedeće pojmove:

- (1 bod) dobro uređen skup
- (1 bod) kardinalni broj proizvoljnog skupa
- (1 bod) funkcija $\aleph$ na klasi svih ordinalnih brojeva

(b) Iskažite:

- (2 boda) teorem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{R}$
- (1 bod) aksiom dobre utemeljenosti

(c) Dokažite da je „biti linearno uređen" invarijanta sličnosti.

(2) Jesu li $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, s antileksikografskim uređajem, slični? Detaljno obrazložite odgovor.

(3) Dokažite da su $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}, <)$ slični.

(4) Neka su $k \in \omega \backslash \{0\}$ i $n \in \omega$ proizvoljni. Izračunajte i detaljno obrazložite: $(\omega \cdot k + n)^\omega$.

(5) Izračunajte

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2+1} \left(\omega^i + i^\omega\right) .$$

(6) Dokažite da postoji maksimalna neprazna familija podskupova od $\mathbb{R}$ (označimo je sa $\mathcal{S}$) sa sljedećim svojstvima:

- za svaki $A \in \mathcal{S}$, skup $\{-x : x \in A\}$ je također u $\mathcal{S}$;
- za sve $A, B \in \mathcal{S}$, njihov presjek $A \cap B$ je također u $\mathcal{S}$;
- $\emptyset \notin \mathcal{S}$.

Teorija skupova
2. kolokvij
2. srpnja 2008.

(1) (10 bodova)
  (a) Definirajte sljedeće pojmove:
    - (1 bod) ordinalni broj
    - (1 bod) potenciranje kardinalnih brojeva
    - (1 bod) Kartezijev produkt familije skupova

  (b) Iskažite:
    - (2 boda) teorem o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$
    - (1 bod) Zermelov teorem o dobrom uređaju

  (c) (4 boda) Dokažite da dobro uređen skup ne može biti sličan podskupu nekog svog početnog komada.

(2) Jesu li $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, s antileksikografskim uređajem, slični? Detaljno obrazložite odgovor.

(3) Dokažite da su $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{Q}^+, <)$ slični.

(4) Neka su $k \in \omega \backslash \{0\}$ i $n \in \omega$ proizvoljni. Izračunajte i detaljno obrazložite: $(\omega^k + n)^\omega$.

(5) Izračunajte

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2+1} (\omega \cdot i + i \cdot \omega) \ .$$

(6) Neka je A proizvoljan beskonačan skup. Dokažite da postoji maksimalna familija $\mathcal{K}$ podskupova od A sa sljedećim svojstvima:
  - za svaki $X \in \mathcal{K}$, vrijedi $A \backslash X \in \mathcal{K}$;
  - za sve $X, Y \in \mathcal{K}$, vrijedi $X \cup Y \in \mathcal{K}$;
  - svi elementi od $\mathcal{K}$ su beskonačni.