Teorija skupova

Pismeni ispit – Prvi zimski rok

3. veljače 2025.

1. (20 bodova) Neka je S skup i R relacija na S. Za $A \subseteq S$ definiramo skup

$$R[A] = \{b \in S \mid (\exists a \in A)(a\, R\, b)\}.$$

Dokažite da je R relacija ekvivalencije na S ako i samo ako za svaki skup $A \subseteq S$ vrijedi

$$R[R[A]] \cup A = R^{-1}[A].$$

2. (20 bodova) Dokažite da je skup svih surjekcija s $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{Q}$ ekvipotentan skupu svih strogo rastućih surjekcija s $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{Q}$.

3. (20 bodova) Za svaki par navedenih skupova (uz standardni, odnosno antileksikografski uređaj) provjerite jesu li međusobno slični.

$$\langle 0,3\rangle \times \mathbb{Z}, \qquad \langle 0,2] \times \mathbb{Z}, \qquad [-2,0\rangle \times \mathbb{Z}, \qquad [2,5] \times \mathbb{Z}$$

4. (20 bodova) Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2+3} 3^i (\omega + i)$$

5. (20 bodova) Neka je A neprazan skup i R simetrična irefleksivna binarna relacija na A. Kažemo da je skup $B \subseteq A$ *povezan* ako za svaki par $a, b \in B$ takav da je $a \neq b$ postoji neki konačan niz $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ takav da je $a_i\ R\ a_{i+1}$ za $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Neka je $a \in A$ element skupa A. Dokažite da postoji maksimalan povezan podskup od A koji sadrži a.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.
Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.