Teorija skupova

Prvi zimski rok – 2. veljače 2024.

1. Neka je R relacija na skupu A i neka je

$$Q = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^{2n} \right) \triangle \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^{2n+1} \right).$$

   Dokažite sljedeće dvije implikacije:

   (a) Ako je R refleksivna, tada je $Q = \emptyset$.

   (b) Ako je R tranzitivna, tada je $Q \subseteq R \triangle I_A$.

2. Dokažite da je skup svih relacija ekvivalencije na $\mathbb{R}$ s neprebrojivim komplementom ekvipotentan skupu svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ čija slika sadrži $\mathbb{N}$.

3. Za svaki par navedenih skupova (uz standardni, odnosno antileksikografski uređaj) dokažite ili opovrgnite njihovu sličnost:

$$\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z} \times \{0,1\} \qquad \mathbb{Z} \times \{0,1,2\}.$$

4. Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi

$$\sum_{i \in \omega \cdot 2 + 2} (i \cdot \omega + 3^i).$$

5. Za skup polinoma $\mathscr{P} \subseteq \mathbb{R}[x]$ kažemo da je *konačno rješiv* ako za svaki neprazan konačan podskup $\{p_0, \ldots, p_n\} \subseteq \mathscr{P}$ postoji $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je

$$p_0(\alpha) + \cdots + p_n(\alpha) = 0.$$

   Dokažite da u $\mathbb{R}[x]$ postoji maksimalan beskonačan konačno rješiv podskup.

Svaki zadatak nosi 20 bodova.