

# Teorija skupova

Prvi jesenski rok – 28. kolovoza 2024.

1. Neka je  $A$  skup,  $R$  relacija na  $A$  i  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  niz relacija na  $A$ . Dokažite:

(a)  $(\liminf_n R_n) \circ R \subseteq \liminf_n (R_n \circ R)$

(b)  $R \circ (\limsup_n R_n) \subseteq \limsup_n (R \circ R_n)$

Navedite primjere koji pokazuju da jednakost ne mora vrijediti.

2. Dokažite da je skup svih otvorenih podskupova od  $\mathbb{R}$  koji sadrže  $\mathbb{Z}$  ekvipotentan skupu svih strogo rastućih nizova realnih brojeva.

3. Za svaki par navedenih skupova (uz antileksikografski uređaj) dokažite ili opovrgnite njihovu sličnost:

$$\mathbb{Q} \quad \mathbb{Q} \times \{0, 1\} \quad \mathbb{Q} \times [0, 1] \quad \mathbb{Q} \times \langle 0, 1 \rangle.$$

4. Prikažite u Cantorovoj normalnoj formi

$$\sum_{i \in \omega+3} (\omega + i)^3.$$

5. Dokažite da postoji maksimalna neprazna relacija  $Q$  na  $\mathbb{R}$  disjunktna s  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  takva da je  $Q \circ Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Svaki zadatak nosi 20 bodova.