Prog2 — Popravni kolokvij, 14. lipnja 2013. — 1. zadatak

Zadatak — grupa A. Pončo i Toro sjede na prvom u nizu od n lopoča u bari, i žele doći na posljednji. Uvijek se kreću u istom smjeru: tromiji Toro se jednim skokom pomiče za 1 ili 2 lopoča, dok se okretniji Pončo pomiče za do 4 lopoča u jednom skoku. No, Pončo se boji da ne propadne u vodu, i staje samo na lopoče na kojima je Toro već bio. U glavnom programu učitajte n i ispišite broj načina na koje oni to mogu učiniti, modulo broj vrijednosti prikazivih u tipu `long`. Načine razlikujemo samo po tome koja žaba je skočila na koji lopoč, ne i po redoslijedu skakanja. ■

Zadatak — grupa B. Dva žapca, Fatso i Banjo, preskaču s jedne obale bare na drugu, preko n lopoča koji se u njoj nalaze. Uvijek se kreću u istom smjeru: popunjeniji Fatso se jednim skokom pomiče na sljedeći lopoč ili preskače jedan, dok agilniji Banjo može preskočiti i do 3 lopoča u jednom skoku. Ipak, Banjo ide na sigurno, i ne želi stati na lopoče koje je Fatso preskočio. U glavnom programu učitajte n i ispišite broj načina na koje oni to mogu učiniti, modulo broj vrijednosti prikazivih u tipu `int`. Načine razlikujemo samo po tome koja žaba je skočila na koji lopoč, ne i po redoslijedu skakanja. ■

Rješenja. Za početak, uočimo da se žapci u obje grupe miču **jednako**:

- teži T (Toro ili Fatso) ide naprijed za 1 ili 2 lopoča, tj. preskače 0 ili 1 lopoč (u smislu da ne staje na njega),
- lakši L (Pončo ili Banjo) ide naprijed za od 1 do 4 lopoča u skoku, tj. preskače od 0 do 3 lopoča (u smislu da ne staje na njih),
- lakši L staje **samo** na neke od lopoča na kojima je teži T **već bio**, tj. L sigurno preskače **sve** lopoče koje je i T preskočio (ako T nije stao na neki lopoč, onda ni L neće stati na njega).

Iz zadnjeg uvjeta slijedi da L uvijek skače **nakon** T — da sazna gdje je T skočio, tj. na koje lopoče L smije stati. Obzirom na to da redoslijed skakanja **nije** bitan za broj načina, već je bitno samo na koje lopoče je koja žaba stala, proces skakanja možemo gledati ovako:

- Na početku, obje žabe kreću s **istog** mjesta — u **A** to je lopoč 1, a u **B** to je obala, koju možemo smatrati kao "lopoč" s brojem 0.
- Prvo skače T i stigne na cilj, a zatim skače L do cilja.

Međutim, iz ovog globalnog "modela" se **ne** vidi kako dobiti neku rekurziju za broj načina, jer se zadnji ključni uvjet teško može iskoristiti na ovako globalnom modelu. Cijeli proces skakanja treba gledati "lokalno" — prema zadnjem uvjetu, između onih lopoča na koje su stale **obje** žabe, na sljedeći način:

- Obje žabe se u nekom trenu nalaze na **istom** lopoču (to je sigurno istina na samom početku).
- Zatim skače T (može i više kratkih skokova), pa onda skače L, i opet se moraju naći zajedno — na **istom** lopoču.
- Međutim, zato što L smije skočiti samo tamo gdje je T već bio (ili trenutno je), onda se odmah, nakon **jednog** skoka L, opet nalaze na **istom** lopoču. I tako redom ...

Dakle, sve skokove teže žabe podijelimo u male "blokove" između onih lopoča na koje skače lakša žaba. Redoslijed nije bitan, pa smijemo gledati skokove između najbližih lopoča na koje staju **obje** žabe — to odgovara jednom skoku L. To je ekvivalentno kao da

- **prvo** skoči L, a onda T **mora** stići na taj isti lopoč!

Iz ove interpretacije je lako izvesti rekurziju za broj načina. Neka je k redni broj **dolaznog** lopoča i neka je $f(k)$ broj načina na koje žapci mogu stići na taj lopoč. Znamo da L može skočiti do uključivo 4 lopoča unaprijed. Uz pretpostavku da je k dovoljno velik, L je stigao na lopoč k jednim skokom, duljine ℓ, s lopoča $k-\ell$, gdje je $1 \le \ell \le 4$. Na polazni lopoč $k-\ell$ žapci su mogli doći na $f(k-\ell)$ načina. Treba još vidjeti na koliko načina može T stići s lopoča $k-\ell$ na lopoč k (preko raznih lopoča između ta dva, jer to se broji). Taj broj načina, očito, ne ovisi o k, već samo o ℓ — to je broj načina na koje se T može pomaknuti za ℓ mjesta unaprijed, označimo ga s $t(\ell)$. Onda je

$$f(k) = \sum_{\ell=1}^{4} t(\ell) f(k-\ell),$$

i još treba naći $t(\ell)$, za $\ell = 1, 2, 3, 4$. Znamo da T može skočiti najviše 2 lopoča unaprijed, pa dobivamo

- za $\ell = 1$ je $t(1) = 1$: $\boxed{k-1} \xrightarrow{1} \boxed{k}$

- za $\ell = 2$ je $t(2) = 2$: $\boxed{k-2} \xrightarrow{1} \boxed{k-1} \xrightarrow{1} \boxed{k}$
  $\boxed{k-2} \xrightarrow{2} \boxed{k}$

- za $\ell = 3$ je $t(3) = 3$: $\boxed{k-3} \xrightarrow{1} \boxed{k-2} \xrightarrow{1} \boxed{k-1} \xrightarrow{1} \boxed{k}$
  $\boxed{k-3} \xrightarrow{1} \boxed{k-2} \xrightarrow{2} \boxed{k}$
  $\boxed{k-3} \xrightarrow{2} \boxed{k-1} \xrightarrow{1} \boxed{k}$

- za $\ell = 4$ je $t(4) = 5$: $\boxed{k-4} \xrightarrow{1} \boxed{k-3} \xrightarrow{1} \boxed{k-2} \xrightarrow{1} \boxed{k-1} \xrightarrow{1} \boxed{k}$
  $\boxed{k-4} \xrightarrow{1} \boxed{k-3} \xrightarrow{1} \boxed{k-2} \xrightarrow{2} \boxed{k}$
  $\boxed{k-4} \xrightarrow{1} \boxed{k-3} \xrightarrow{2} \boxed{k-1} \xrightarrow{1} \boxed{k}$
  $\boxed{k-4} \xrightarrow{2} \boxed{k-2} \xrightarrow{1} \boxed{k-1} \xrightarrow{1} \boxed{k}$
  $\boxed{k-4} \xrightarrow{2} \boxed{k-2} \xrightarrow{2} \boxed{k}$

Zaključak: za dovoljno veliki k, **rekurzija** za broj načina $f(k)$ ima oblik

$$f(k) = f(k-1) + 2f(k-2) + 3f(k-3) + 5f(k-5).$$

Za potpuno rješenje, fale nam još dvije stvari — to su jedine po kojima se grupe **razlikuju**:

- **početni** uvjeti za rekurziju = odakle se starta, odnosno, 4 početne vrijednosti, i

- **završni** uvjet = gdje treba stići, odnosno, što treba izračunati za zadani n.

Grupa A. Na **početku**, žapci se nalaze na lopoču s brojem 1, a na **kraju** se moraju nalaziti na lopoču s brojem n.

$$\boxed{1} \qquad \boxed{2} \quad \ldots \quad \boxed{n-1} \qquad \boxed{n}$$

Prema definiciji broja $f(k)$, ovdje tražimo upravo $f(n)$.

Zbog početnog položaja na lopoču 1, za početak rekurzije treba staviti $f(1) = 1$. Naime, za $n = 1$, obje žabe su već i na krajnjem lopoču, tj. ne moraju skakati. No, broje se pozicije na lopočima, i točno je jedna takva = obje žabe su na jedinom lopoču.

Fale nam još 3 početna uvjeta za rekurziju. Njih možemo naći, na primjer, tako da eksplicitno izračunamo $f(n)$, za $n = 2, 3, 4$. Uz ponešto posla (pogledati ranije slike i pažljivo zbrajati), izlazi

$$f(2) = 1, \qquad f(3) = 3, \qquad f(4) = 8.$$

Međutim, postoji i puno **jednostavniji** način za zadavanje početnih uvjeta. Izvedena rekurzija, zapravo, vrijedi za bilo koji cijeli broj k. Dovoljno je iskoristiti da žapci startaju s lopoča broj 1 i da ne mogu skakati unatrag, pa je $f(k) = 0$, za svaki cijeli broj $k < 1$ (jer tamo ne mogu doći) i $f(1) = 1$ (tu startaju). Lako se provjeri da iz tih početnih uvjeta dobivamo gornje vrijednosti za $f(2)$, $f(3)$ i $f(4)$.

Grupa B. Na **početku**, žapci se nalaze na obali, **ispred** lopoča s brojem 1, a na **kraju** se moraju nalaziti na obali, **iza** lopoča s brojem n. Početnu obalu možemo uzeti kao "lopoč" s brojem 0, a završnu obalu kao "lopoč" s brojem $n + 1$.

$$\boxed{\text{obala} = 0} \qquad \boxed{1} \quad \ldots \quad \boxed{n} \qquad \boxed{\text{obala} = n+1}$$

Prema definiciji broja $f(k)$, ovdje tražimo $f(n + 1)$.

Potrebna 4 početna uvjeta za rekurziju možemo naći tako da eksplicitno izračunamo $f(n + 1)$, za $n = 0, 1, 2, 3$. Za $n = 0$, obje žabe samo trebaju skočiti na drugu obalu. Obzirom na to da lopoča nema, imamo jednu "poziciju" = obje žabe nisu skočile ni na jedan "pravi" lopoč. Uz puno truda (ovdje je još teže), izlazi

$$f(1) = 1, \qquad f(2) = 3, \qquad f(3) = 8, \qquad f(4) = 22.$$

Potpuno istim zaključivanjem kao u grupi **A**, uz pomak za jedan lopoč unatrag, jer žapci startaju s "lopoča" 0, možemo uzeti i lakše početne uvjete: $f(k) = 0$, za svaki cijeli broj $k < 0$ (jer tamo ne mogu doći) i $f(0) = 1$ (tu startaju). ■

Završni komentar. Ako u grupi **A** uzmemo da lopoči imaju brojeve od 0 do $n - 1$, tako da početak ujednačimo s grupom **B**, onda možemo

- uzeti **početak** rekurzije kao za **B** i **računati** $f(n - 1)$.

Dakle, uzmemo istu funkciju za računanje $f(k)$ u obje grupe, s početkom kao u **B**. Jedina razlika: za zadani n, u **A** računamo $f(n - 1)$, a u **B** računamo $f(n + 1)$.

Umjesto rekurzivnih funkcija za $f(k)$ (pogledati `zad1a_r.c` i `zad1b_r.c`), bolje je $f(k)$ računati iterativno (petljom), koristeći "prozor" od 5 uzastopnih članova niza (`zad1a.c` i `zad1b.c`), slično kao kod Fibonaccijevih brojeva.