

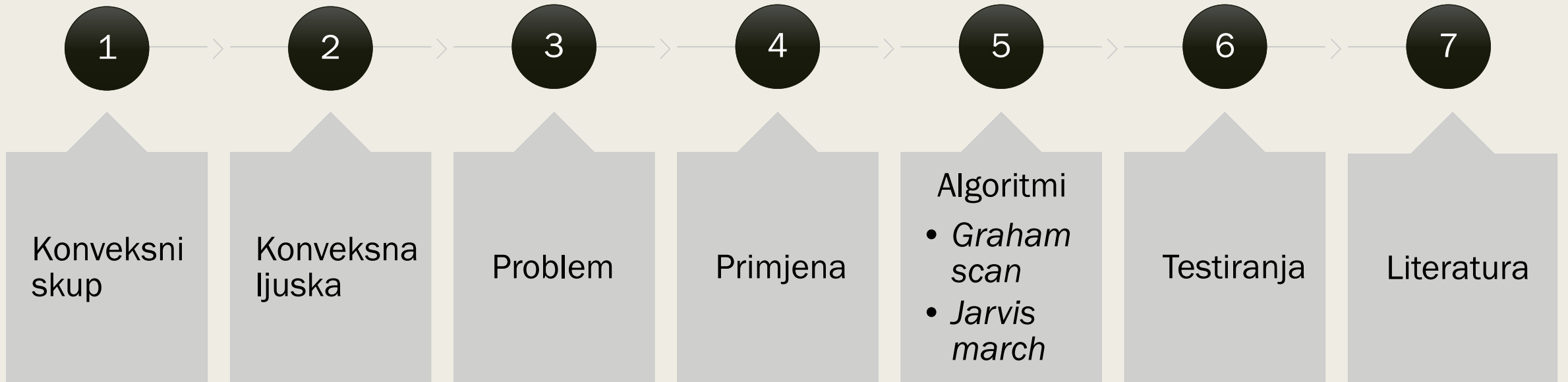
# KONVEKSNA LJUSKA SKUPA TOČKA

Sara Pužar

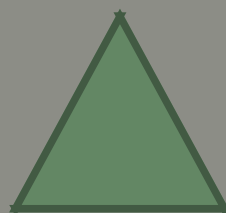
Prirodoslovno-matematički fakultet

Seminar iz kolegija Oblikovanje i analiza algoritama

# Sadržaj



# Što je konveksni skup?



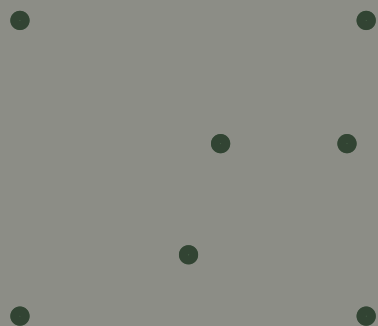
- Kažemo da je skup  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  konveksan ako za bilo koje dvije točke  $x_1, x_2 \in D$  sadrži i segment određen tim točkama, tj.

$$x_1, x_2 \in D \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in D \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

- Za skup  $S$  kažemo da je konveksan, ako je za svake dvije točke  $x$  i  $y$  iz  $S$  i njihova spojnice sadržana u  $S$ .

# Što je konveksna ljuska nekog skupa?

S

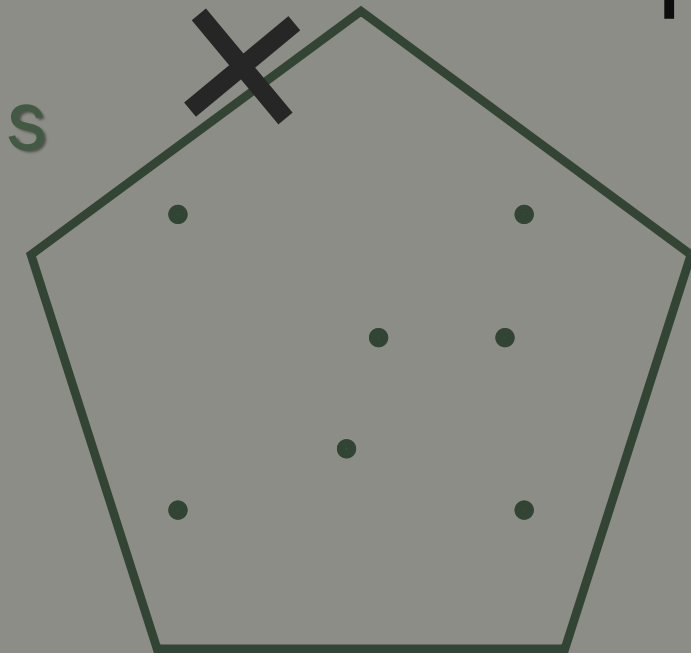


- Neka je  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Konveksna ljuska skupa  $S$  je skup svih konveksnih kombinacija točaka iz  $S$ . Oznaka

$$\begin{aligned} & \text{conv}(S) \\ &= \left\{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m : x_1, \dots, x_m \right. \\ & \left. \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0,1], \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\} \end{aligned}$$

- Konveksna ljuska skupa  $S$  je najmanji konveksan skup koji sadrži skup  $S$ .

# Što je konveksna ljuska nekog skupa?

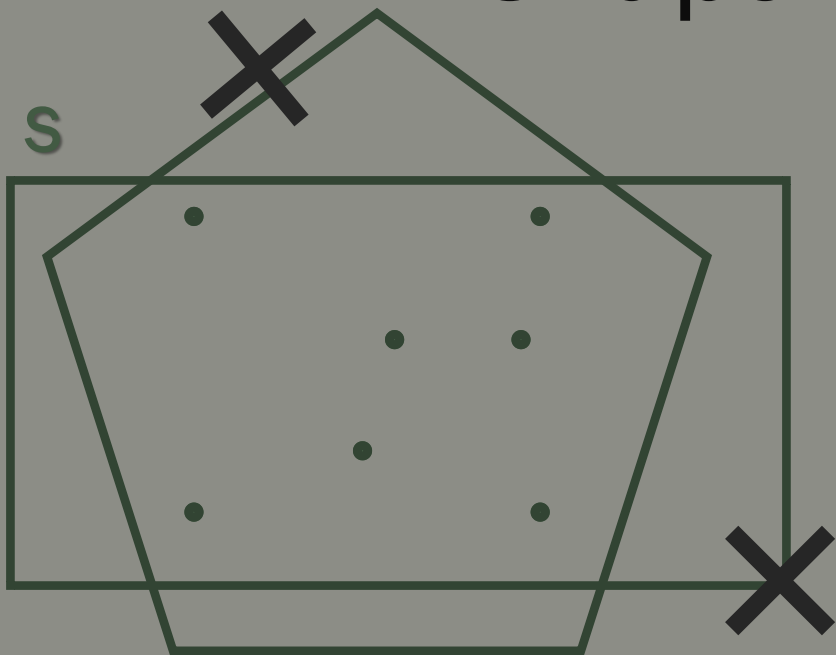


- Neka je  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Konveksna ljuska skupa  $S$  je skup svih konveksnih kombinacija točaka iz  $S$ . Oznaka

$$\begin{aligned} & \text{conv}(S) \\ &= \left\{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m : x_1, \dots, x_m \right. \\ & \left. \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0,1], \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\} \end{aligned}$$

- Konveksna ljuska skupa  $S$  je najmanji konveksan skup koji sadrži skup  $S$ .

# Što je konveksna ljuska nekog skupa?

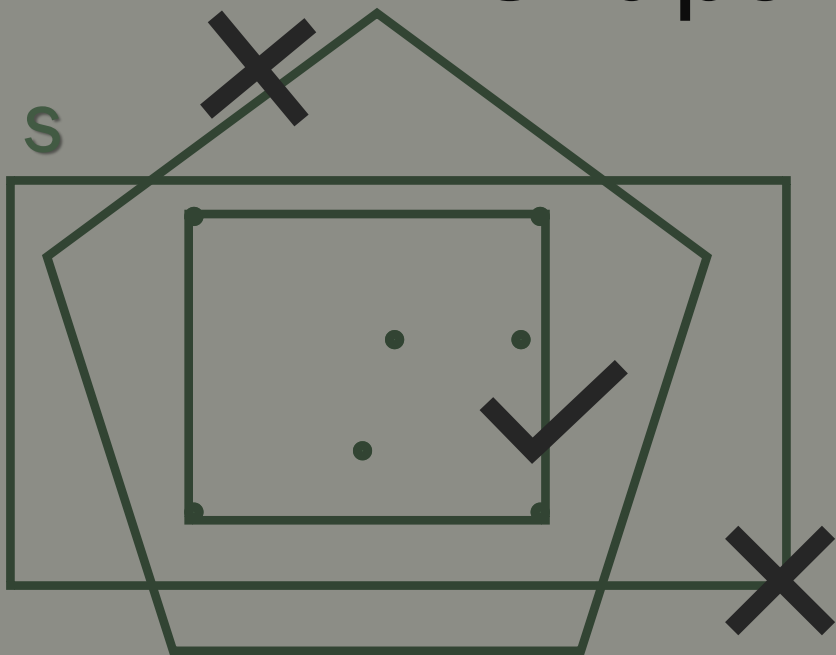


- Neka je  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Konveksna ljuska skupa  $S$  je skup svih konveksnih kombinacija točaka iz  $S$ . Oznaka

$$\begin{aligned} & \text{conv}(S) \\ &= \left\{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m : x_1, \dots, x_m \right. \\ & \left. \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0,1], \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\} \end{aligned}$$

- Konveksna ljuska skupa  $S$  je najmanji konveksan skup koji sadrži skup  $S$ .

# Što je konveksna ljuska nekog skupa?



- Neka je  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Konveksna ljuska skupa  $S$  je skup svih konveksnih kombinacija točaka iz  $S$ . Oznaka

$$\begin{aligned} & \text{conv}(S) \\ &= \left\{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m : x_1, \dots, x_m \right. \\ & \left. \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0,1], \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\} \end{aligned}$$

- Konveksna ljuska skupa  $S$  je najmanji konveksan skup koji sadrži skup  $S$ .

# Problem

Ulaz: Zadani skup točaka  $S$ .

Određivanje konveksne ljuske

Izlaz: Točke koje određuju konveksnu ljusku skupa  $S$ .



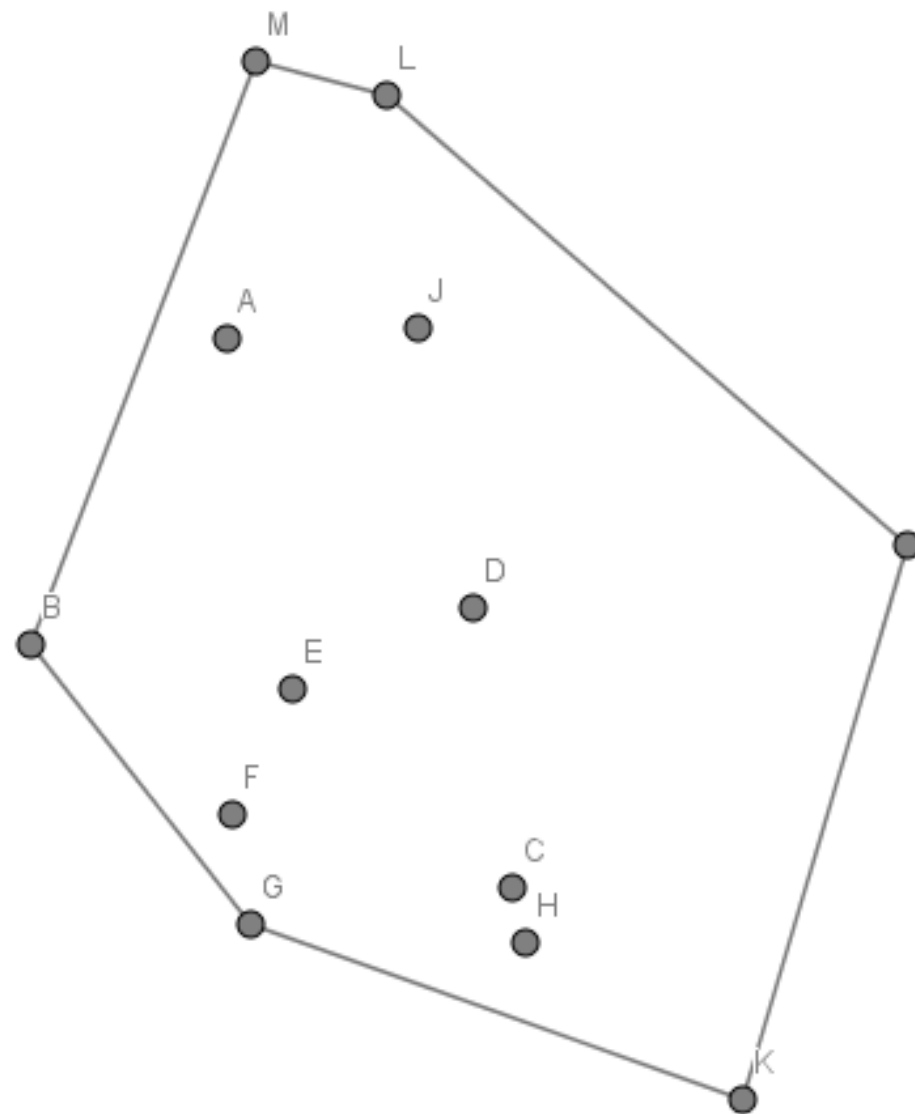


# Problem

Ulaz: Zadani skup točaka  $S$ .

**Određivanje konveksne ljuske**

Izlaz: Točke koje određuju konveksnu ljusku skupa  $S$ .

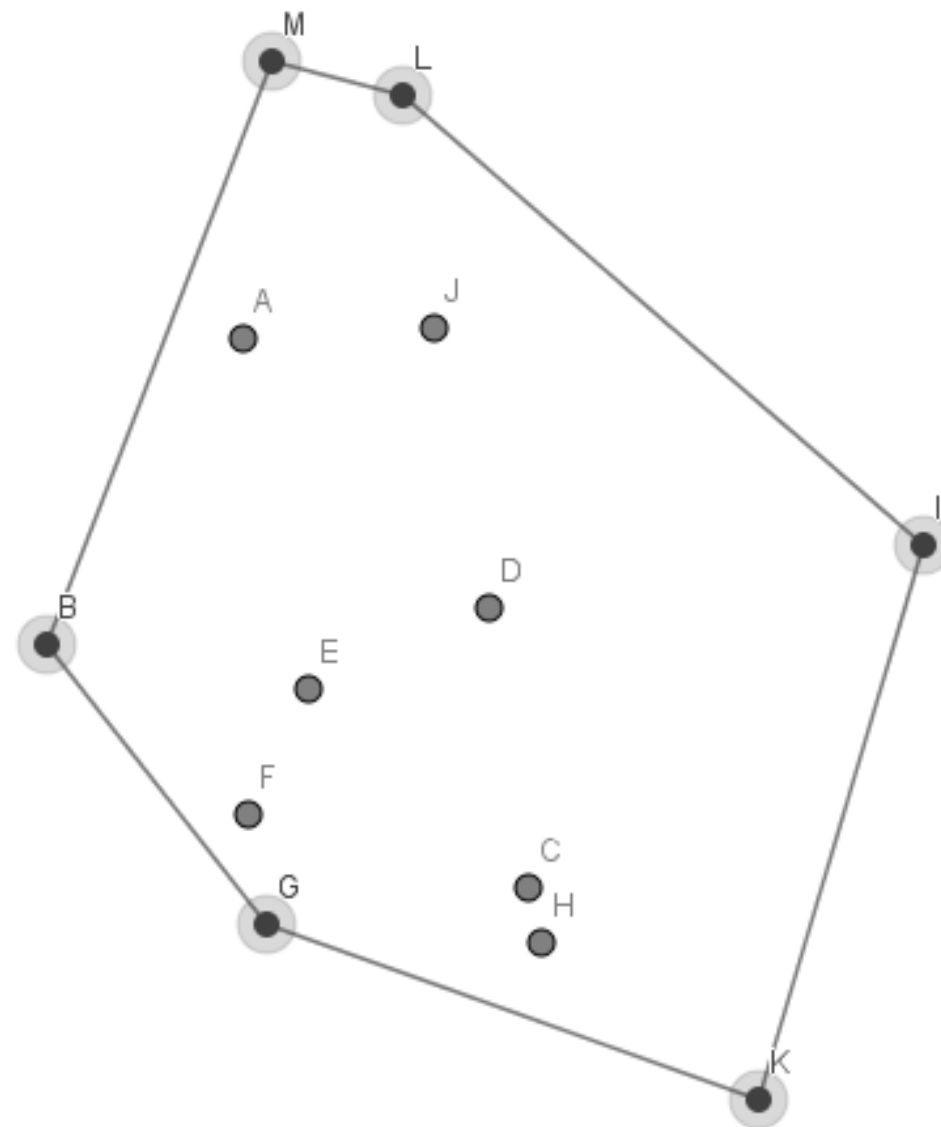


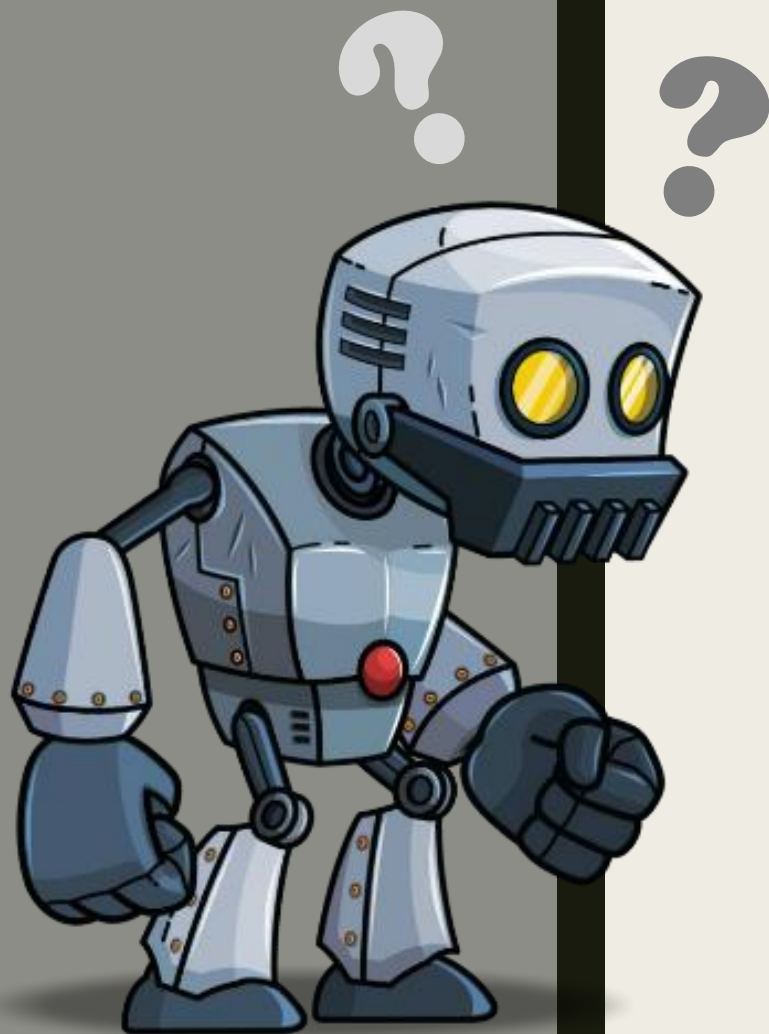
# Problem

Ulaz: Zadani skup točaka  $S$ .

Određivanje konveksne ljuske

Izlaz: Točke koje određuju konveksnu ljusku skupa  $S$ .





# Primjena konveksne ljuske?

- Određivanje kretnji robota
- Izračunavanje najkraće ograde oko područja S

# Algoritmi

---

Graham scan

---

Jarvis march

---

Quick hull

---

Monotone chain

---

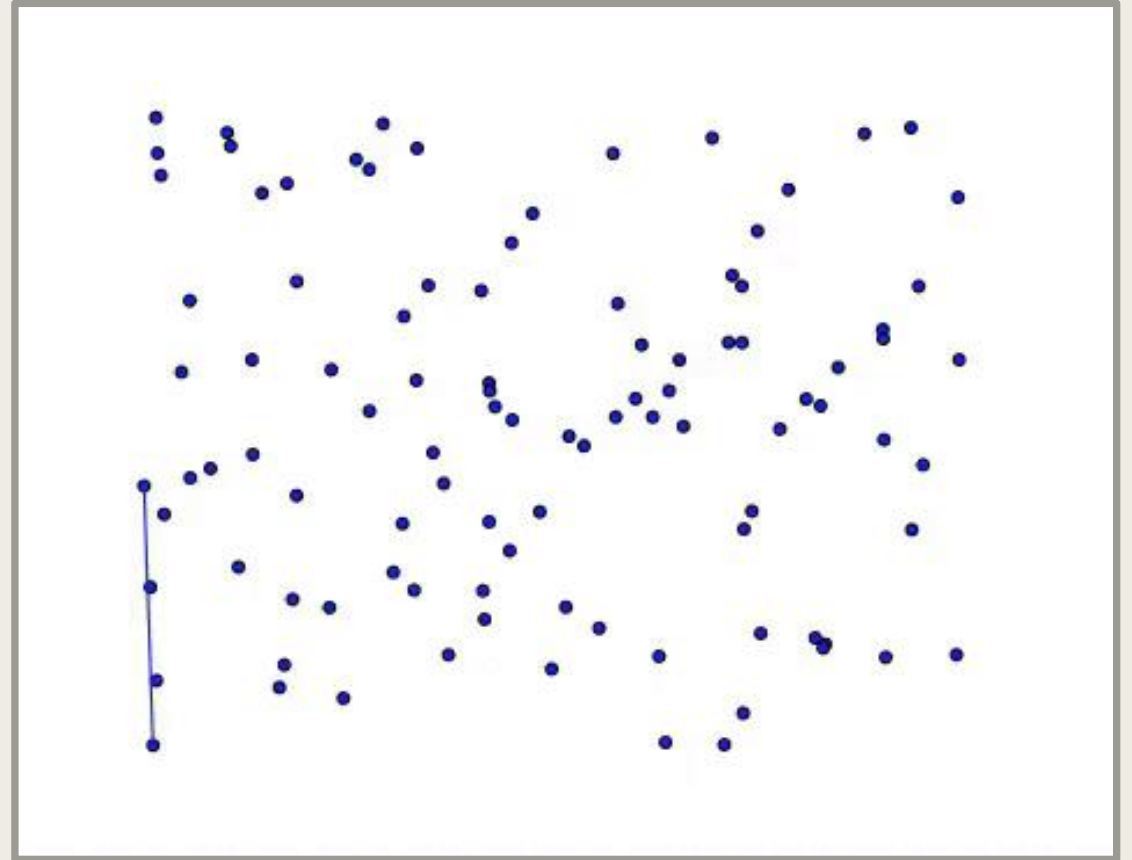
The ultimate planar convex hull algorithm

---

Chan's algorithm

# Graham scan

- Ronadl Graham 1972.
- Ključni pojmovi:
  - *Sortiranje*
  - *Polarni kut*
  - *Lijevi okret*



# Graham scan - algoritam

**Ulaz :** Zadani skup točkaka  $S$ .

**Izlaz :** Konveksna ljuska od  $S$ , spremljena u stog  $St$ .

1. Neka je  $p_0$  točka s minimalnom  $y$  koordinatom (najdesnija)
2.  $T[0] \leftarrow p_0$
3. Neka su  $T[1, \dots, n - 1]$  točke iz skupa  $S \setminus \{p_0\}$  sortirane prema rastućem polarnom kutu s obzirom na točku  $p_0$ . U slučaju izjednačenja, točka bliže točki  $p_0$  ima prednost.
4.  $push(St, T[n - 1]); push(St, T[0]);$
5.  $k \leftarrow 1$
6. *While*  $k < n - 1$
7.     Neka je  $St = (T[n - 1], \dots, T[i], T[j])$ ,  $T[j]$  je na vrhu stoga.
8.     *If*  $T[i], T[j], T[k]$  formiraju lijevi okret *then*
9.          $push(St, T[k]);$
10.          $k \leftarrow k + 1$
11.     *Else*  $pop(St);$
12.     *End if*
13. *End while*

# Graham scan – vremenska složenost



Opći slučaj:

$$O(n \log n)$$

Najbolji slučaj:

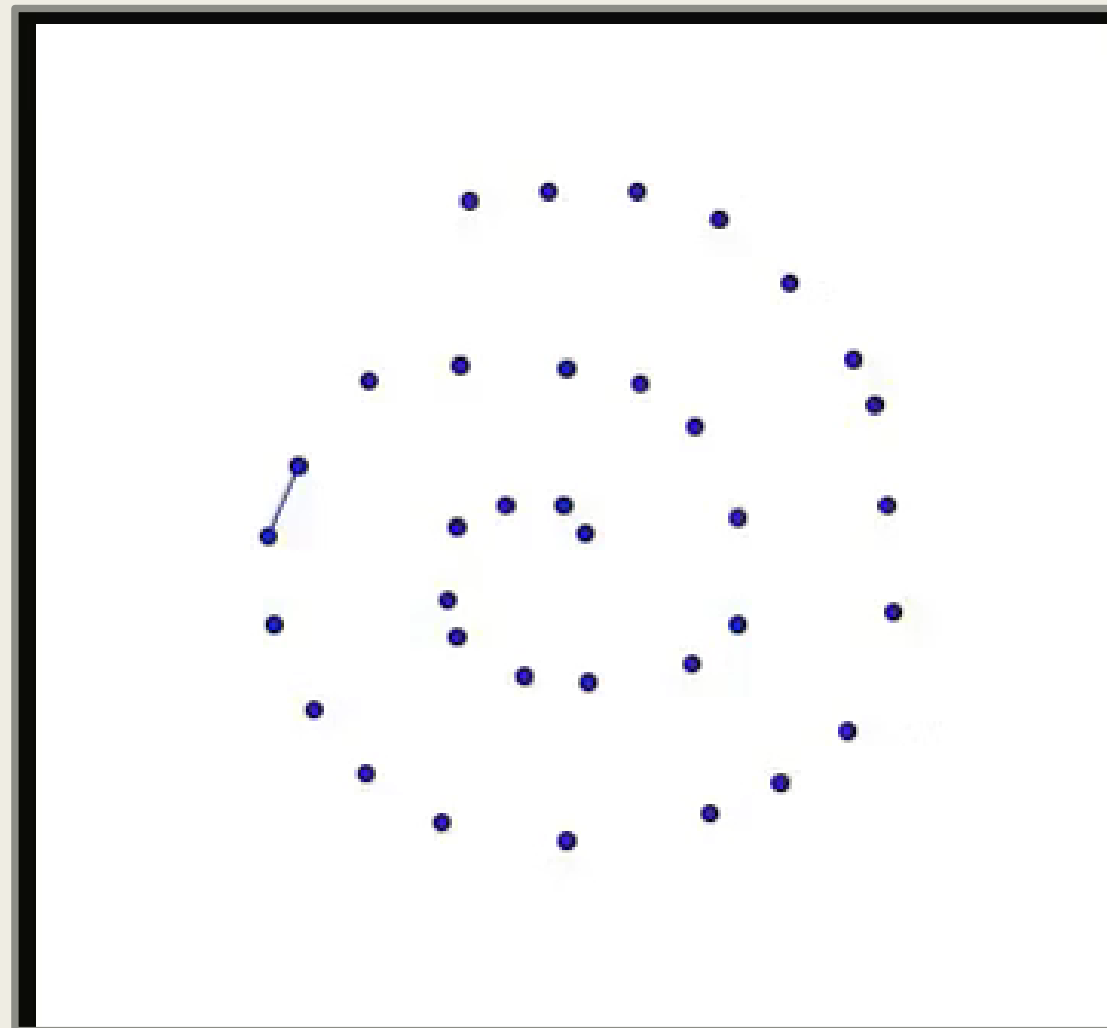
$$O(n \log n)$$

Najgori slučaj:

$$O(n \log n)$$

# Jarvis march

- Omotavanje poklona
- R. A. Jarvis, 1973.
- Ključni pojmovi :
  - *Polarni kut*
  - *Negativna koordinatna os*





# Jarvis march - algoritam

**Ulaz :** Zadani skup točaka  $S$ .

**Izlaz :** Konveksna ljuska od  $S$ , spremljena u stog  $St$ .

1. Neka je  $p_0$  točka s minimalnom  $y$  koordinatom (najdesnija),  $p_{min} = p_0$
2. *Do*
3. Neka je  $p_{next}$  točka koja zatvara najmanji polarni kut s  $p_0$  ( u slučaju jednakog kuta, zadržavamo dalju točku ). Kad dostignemo najvišu točku ( maksimalna  $y$  koordinata ), promatramo najmanji kut s obzirom na negativnu koordinatnu os.
4.  $push ( St, p_{next} );$
5.  $p_0 = p_{next}$
6. *While* (  $p_0$  je različito od  $p_{min}$  );

# Jarvis march – vremenska složenost

*$h$  – broj točaka  
na konveksnoj ljusci*

Opći slučaj:

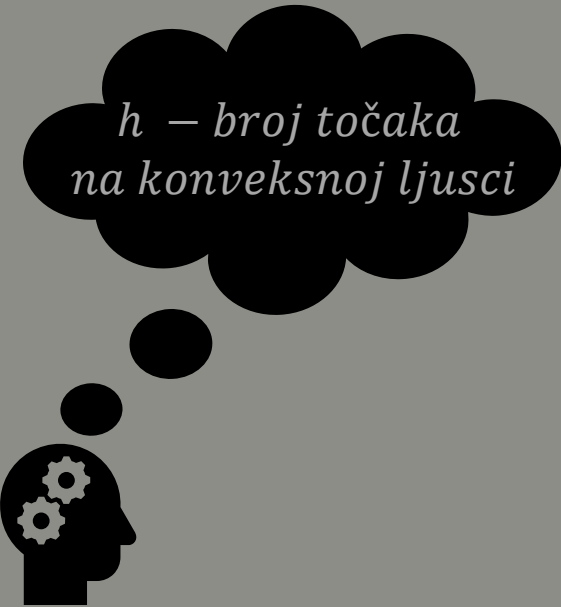
$$O(nh)$$

Najbolji slučaj:

$$O(n)$$

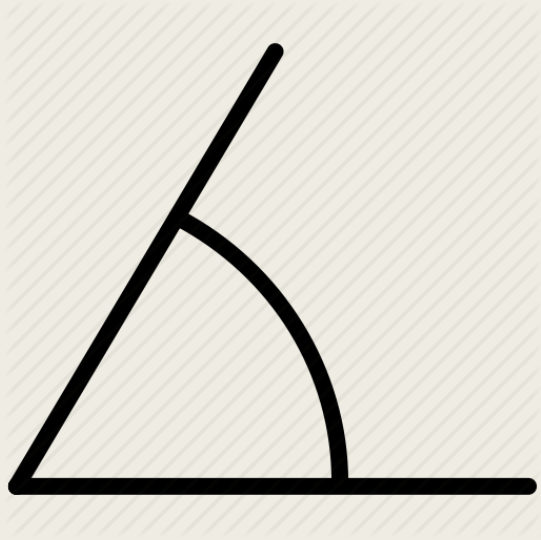
Najgori slučaj:

$$O(n^2)$$

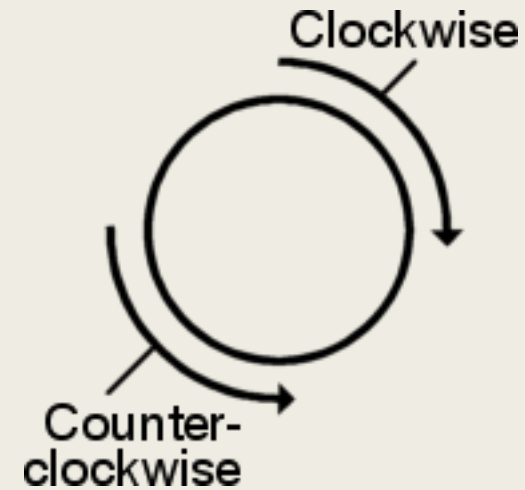


# Tips & Tricks – implementacija

Polarni kut



Orijentacija točaka

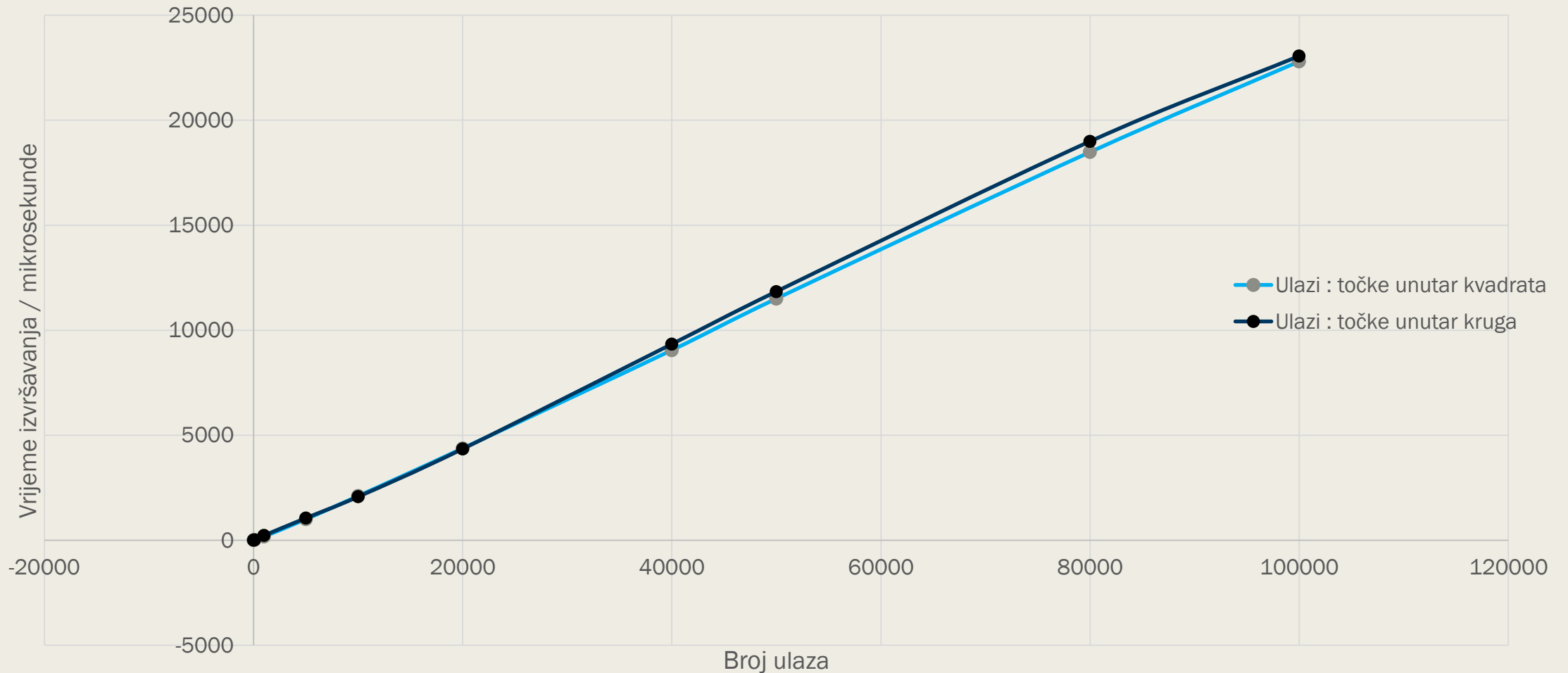


# Testiranja

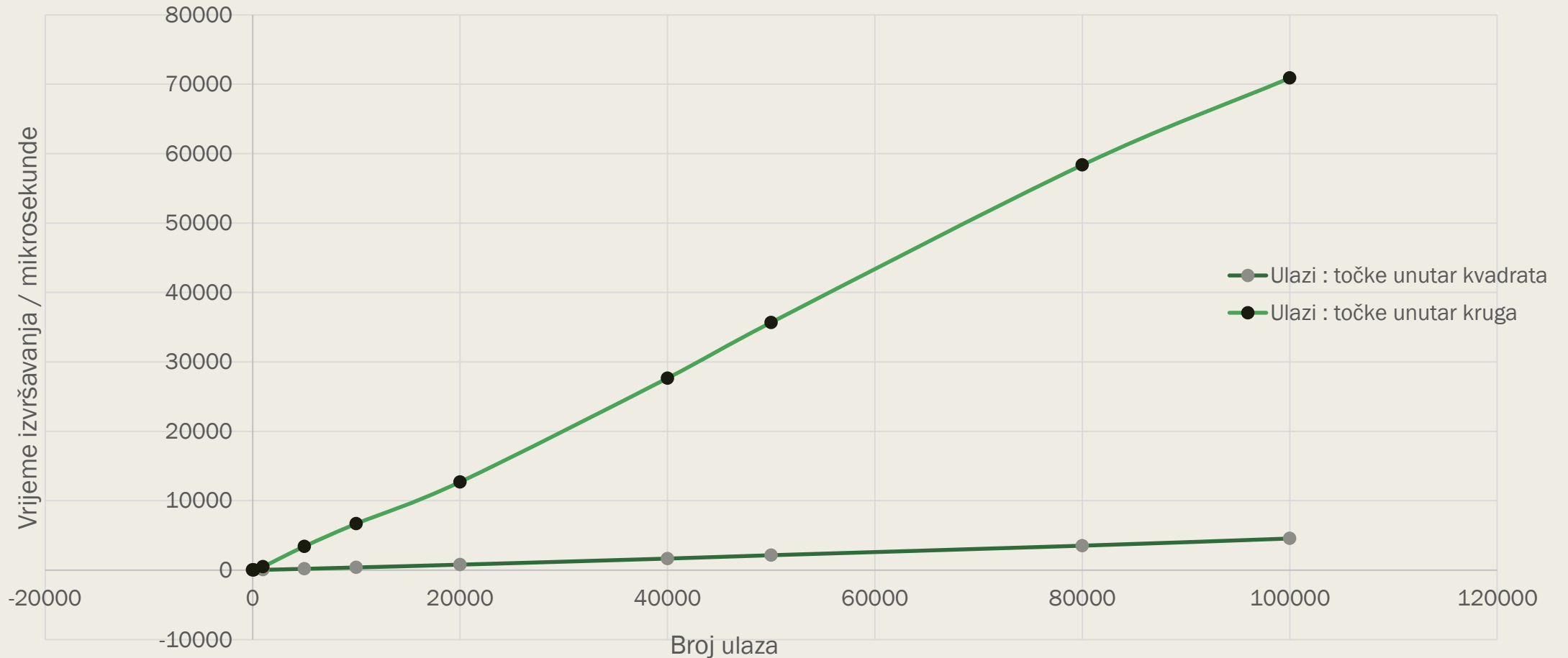


- Testiranja su provedena s količinama od 10 do 100000 točaka.
- Testiranja su provedena na ulazima ili iz područja kvadrata ili kruga.
- Uzeta je srednja vrijednost od 1000 mjerenja.
- Karakteristike računala:
  - *Procesor: Intel Core i5-4200M 2.50GHz ( max Turbo 3.1 GHz ) Cache 3 MB*
  - *RAM: 4 GB , DDR3 1600MHz*
- Compiler: Microsoft (R) C/C++ Optimizing Compiler Version 19.12.25834 for x86

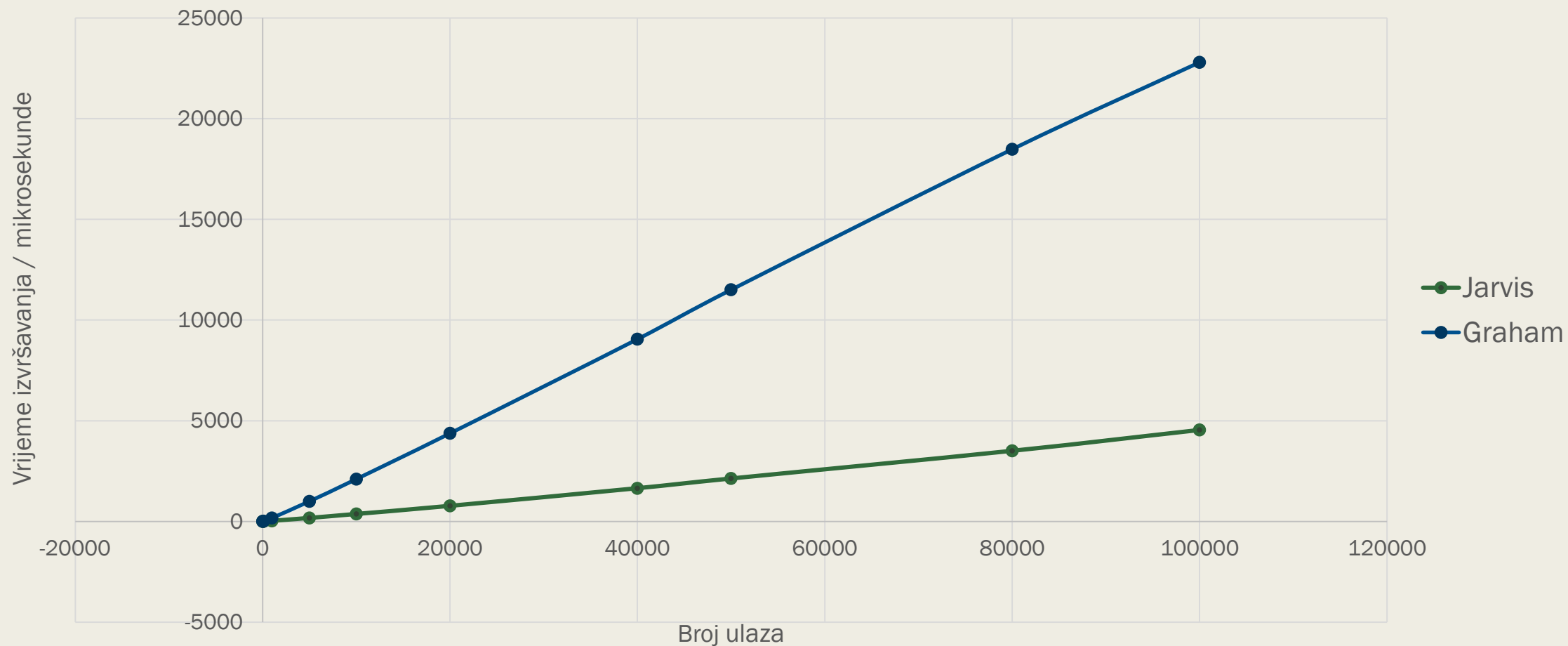
# Testiranje na nasumičnim ulazima unutar kvadrata i unutar kruga – Graham scan



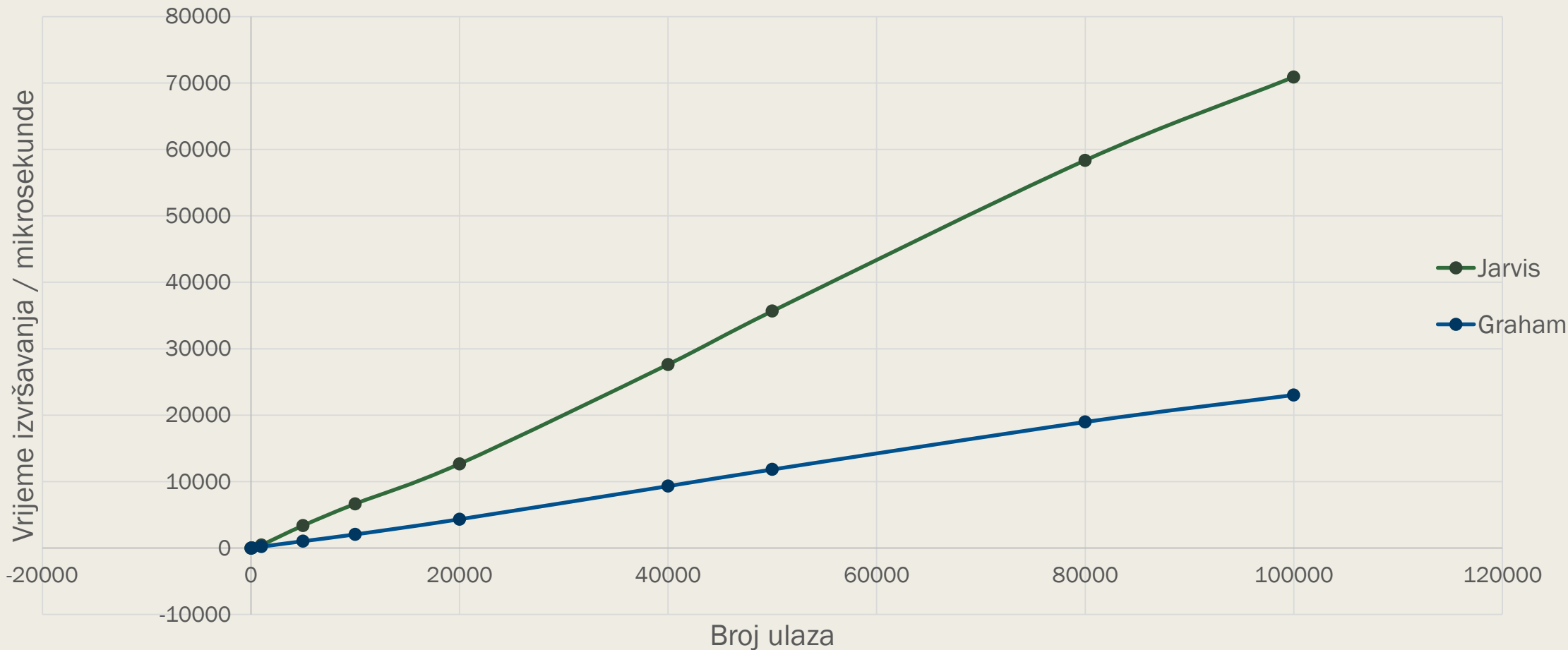
# Testiranje na nasumičnim ulazima unutar kvadrata i unutar kruga – Jarvis march



# Testiranje na nasumičnim ulazima unutar kvadrata - usporedba



# Testiranje na nasumičnim ulazima unutar kruga - usporedba





# Literatura

- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, Introduction to Algorithms, 2nd edition, MIT Press, Massachusetts, 2001., 826–833
- M. H. Alsuwaiyel, Algorithms : Design Techniques and Analysis , 1999., Publishing House of Electronics Industry ,471-474
- R. Sedgwick, K. Wayne, „ 9.9 CONVEX HULL”, „<https://algs4.cs.princeton.edu/99hull/>”, 26.8.2016. 13.1.2018.