Poglavlje 1

DIOFANTSKE JEDNADŽBE

Neka je f polinom s n varijabli i cjelobrojnim koeficijentima. Jednadžba oblika
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$
čija su rješenja cijeli brojevi naziva se diofantska jednadžba.

Jednadžbe takve vrste razmatrao je već starogrčki matematičar Diofant (Diofant iz Aleksandrije, oko 250.g.) i njemu u čast su ove jednadžbe i dobile ime.

Najjednostavnije jednadžbe su naravno linearne diofantske jednadžbe oblika
$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = m,$$
gdje su $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$.

1.1 Linearne diofantske jednadžbe s dvije nepoznanice

Detaljnije ćemo promotriti linearne diofantske jednadžbe s dvije nepoznanice, tj. jednadžbe oblika
$$ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbf{Z}.$$

Primjer 11. *Riješimo homogenu diofantsku jednadžbu* $3x + 5y = 0$.

Izrazimo jednu nepoznanicu pomoću druge:
$$x = -\frac{5}{3}y.$$

Budući da je x cijeli broj, rješenje y mora biti djeljivo s 3, tj. y je oblika $y = 3t$ gdje je t cijeli broj. No, tada je $x = -5t$. Dakle, rješenja diofantske jednadžbe $3x + 5y = 0$ su parovi $(-5t, 3t)$, $t \in \mathbf{Z}$.

Sljedeći teorem nam daje uvjet egzistencije i oblika rješenja diofantske jednadžbe.

Teorem 12. *a) Diofantska jednadžba $ax + by = c$, gdje su $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $a^2 + b^2 \neq 0$ ima cjelobrojna rješenja ako i samo ako $M(a, b)$ dijeli c.*

b) Ako su x_0, y_0 rješenja te jednadžbe onda su sva rješenja oblika $x = x_0 + \frac{b}{d}t$, $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, $t \in \mathbf{Z}$, gdje je $d = M(a, b)$.

Dokaz ovog teorema može se naći u knjizi Pavković-Veljan: Elementarna matematika I, str. 554.

Rješenje (x_0, y_0) naziva se partikularno rješenje diofantske jednadžbe i ustvari opće rješenje je zbroj partikularnog rješenja i rješenja homogene jednadžbe $ax + by = 0$.

Primjer 13. *Riješimo diofantsku jednadžbu $3x + 5y = 8$.*

Partikularno rješenje ove jednadžbe je par $(1, 1)$, a rješenja pripadne homogene su $(-5t, 3t)$, $t \in \mathbf{Z}$.

Rješenja opće jednadžbe su parovi $(1 - 5t, 1 + 3t)$, $t \in \mathbf{Z}$.

Kako naći partikularno rješenje diofantske jednadžbe? Odgovor na to nam daje Euklidov algoritam pomoću kojeg određujemo cijele brojeve k i l za koje vrijedi $ax + by = d$ gdje je $d = M(a, b)$, a zatim množenjem sa $\frac{c}{d}$ dobivamo partikularno rješenje. Pokažimo taj algoritam na jednom primjeru.

Primjer 14. *Riješimo diofantsku jednadžbu $1000x - 123y = 5$.*

Kako nije potpuno očito partikularno rješenje nađimo ga Euklidovim algoritmom. Izvršavanjem uzastopnih dijeljenja dobivamo ovaj niz jednakosti:

$$\begin{aligned} 1000 &= 8 \cdot 123 + 16 \\ 123 &= 7 \cdot 16 + 11 \\ 16 &= 1 \cdot 11 + 5 \\ 11 &= 2 \cdot 5 + 1. \end{aligned}$$

Kad je ostatak jednak 1 postupak dijeljenja završava. Iz tih jednakosti izražavamo ostatke:

$$\begin{aligned} 16 &= 1000 - 8 \cdot 123 \\ 11 &= 123 - 7 \cdot 16 \\ 5 &= 16 - 1 \cdot 11 \\ 1 &= 11 - 2 \cdot 5. \end{aligned}$$

Uvrstimo u posljednju jednakost izraz za broj 5 iz pretposljednje jednakosti itd: $1 = 11-2\cdot 5 = 11-2\cdot(16-11\cdot 1) = 3\cdot 11-2\cdot 16$. $1 = 3\cdot(123-16\cdot 7)-2\cdot 16 = 3\cdot 123 - 23\cdot 16$. $1 = 3\cdot 123 - 23\cdot(1000-8\cdot 123) = -23\cdot 1000 + 187\cdot 123$. Dakle, $1 = -23\cdot 1000 + 187\cdot 123$, pa množenjem s 5 dobivamo

$$5 = -115 \cdot 1000 + 935 \cdot 123.$$

Odavde očitavamo da je partikularno rješenje $x_0 = -115$ i $y_0 = -935$.

Homogena jednadžba glasi $1000x - 123y = 0$ i njezino rješenje je $x = 123t$, $y = 1000t$, $t \in \mathbf{Z}$, pa je rješenje dane diofantske jednadžbe

$$x = -115 + 123t, \quad y = -935 + 1000t, \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Ovakav način rješavanja nije baš prikladan kao metoda koju ćemo ponuditi šestoškolcima s kojima ovo gradivo obrađujemo na dodatnoj nastavi. S njima ćemo linearnu diofantsku jednadžbu rješavati ili Eulerovom metodom ili metodom pokušaja.

Primjer 15. *Za prijevoz neke robe raspolažemo vrećama od 40 kg i 60 kg. Koliko treba uzeti jednih, a koliko drugih da se prenese 500 kg robe?*

Eulerova metoda. Označimo s x broj vreća od 40 kg, a s y broj vreća od 60 kg. Iz uvjeta zadatka dobivamo diofantsku jednadžbu $40x + 60y = 500$, odnosno nakon skraćivanja s 20 dobivamo

$$2x + 3y = 25,$$

uz uvjete $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Izrazimo onu nepoznanicu čiji je koeficijent manji po apsolutnoj vrijednosti:

$$x = \frac{25-3y}{2} = 12 - y + \frac{1-y}{2}.$$

Budući da tražimo cjelobrojna rješenja, x će biti cjelobrojan ako i samo ako je izraz $\frac{1-y}{2}$ cjelobrojan, tj. $\frac{1-y}{2} = u$, gdje je $u \in \mathbf{Z}$. Transformiranjem dobivamo opet diofantsku jednadžbu $2u + y = 1$ čiji su koeficijenti po apsolutnim vrijednostima manji od koeficijenata početne. Izrazimo sad y:

$$y = 1 - 2u$$

i uvrstimo u izraz za x: $x = 12 - (1 - 2u) + u = 11 + 3u$. Rješenja jednadžbe su parovi (x, y) gdje je $x = 11 + 3u$, $y = 1 - 2u$. Iz uvjeta $x \geq 0$, $y \geq 0$ dobivamo da je $-\frac{11}{3} \leq u \leq \frac{1}{2}$, tj. $u = -3, -2, -1, 0$. Traženi parovi (x, y) su $(2, 7), (5, 5), (8, 3), (11, 1)$.

Metoda pokušaja. Zbog uvjeta zadatka mogućnosti za x i y ima konačno mnogo. Stoga ćemo ih sve ispisati, ali koristeći sustavni ispis. Promatramo izraz $2x = 25 - 3y$ i uzimamo redom za y vrijednosti $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Ako je y veći od 8, tada bi x bio negativan, a to nema fizikalnog smisla. Samo za neke vrijednosti od y je x cijeli broj i ti parovi čine rješenja.

1.2 Nelinearne diofantske jednadžbe

U ovom poglavlju bavit ćemo se nelinearnim diofantskim jednadžbama. Univerzalna metoda rješavanja tih jednadžbi ne postoji, ali zato postoji niz metoda kojima rješavamo neke specijalne tipove nelinearnih diofantskih jednadžbi. Neke od tih metoda su:

- metoda faktorizacije
- metoda kvocijenta
- metoda posljednje znamenke
- metoda kongruencija
- metoda zbroja potencija s parnim eksponentima
- metoda nejednakosti.

Svaku od ovih metoda ilustrirat ćemo karakterističnim primjerom iz kojeg će biti jasna bit i način primjene metode.

Metoda faktorizacije

Primjer 16. *Riješimo diofantsku jednadžbu* $xy + x - 3y - 6 = 0$.

Lijevu stranu jednadžbe rastavimo na faktore:

$(xy+x)+(-3y-3)-3=0$, $x(y+1)-3(y+1)=3$, $(y+1)(x-3)=3$. Dakle, produkt cjelobrojnih izraza $y+1$ i $x-3$ jednak je 3, a to je moguće samo u slučajevima koji su dani u tablici:

$x-3$	1	-1	3	-3
$y+1$	3	-3	1	-1

Rješenja su dana u sljedećoj tablici:

x	4	2	6	0
y	2	-4	0	-2

Metoda kvocijenta

Primjer 17. *Riješimo diofantsku jednadžbu* $xy+2y=x$.

Izrazimo jednu nepoznanicu, na primjer y.

$$y=\frac{x}{x+2}=1-\frac{2}{x+2}.$$

Izraz $\frac{2}{x+2}$ je cjelobrojan samo ako je $x+2$ djelitelj broja 2, tj. $x+2\in\{1,-1,2,-2\}$. Otuda dobivamo da je $x\in\{-1,-3,0,-4\}$. Odgovarajući y su $y\in\{-1,3,0,2\}$.

Metoda posljednje znamenke

Primjer 18. *Riješimo diofantsku jednadžbu* $x^2+5y=199519941993$.

Budući da kvadrat cijelog broja završava sa znamenkom 0,1,4,5,6,ili 9, a broj $5y$ sa znamenkom 0 ili 5, slijedi da zbroj na lijevoj strani završava s 0,1,4,5,6, ili 9, a nikako s 3. Dakle, zadana diofantska jednadžba nema rješenja.

Metoda kongruencija

Primjer 19. *Riješimo diofantsku jednadžbu* $x^2-4y=1995$.

Budući da je 1995 neparni broj, a $4y$ parni, tada je x^2 neparan, tj. x je neparan. Možemo ga pisati u obliku $x = 2k - 1$, $k \in \mathbf{Z}$. Uvrstimo li to u početnu jednadžbu dobivamo

$$(2k-)^2 - 4y = 1995$$

$$4(k^2 - k - y) = 1994.$$

Lijeva strana je djeljiva s 4, dok desna strana nije, pa jednadžba nema rješenja.

Metoda zbroja potencija s parnim eksponentima

Primjer 110. *Riješimo diofantsku jednadžbu* $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$.

Prikažimo ovu jednadžbu u obliku zbroja kvadrata. Dopunom do potpunih kvadrata dobivamo:

$(x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 - 8 = 0$, $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$. Jedine mogućnosti da se ostvari ovaj zbroj su: $((x + 1)^2 = 4$ i $(y - 2)^2 = 9)$ ili $((x + 1)^2 = 9$ i $(y - 2)^2 = 4)$. Rješenja su $(x, y) \in \{(1, 5), (2, 4)\}$.

Metoda nejednakosti

Primjer 111. *Riješimo diofantsku jednadžbu* $3^x + 4^x = 5^x$.

Očito je $x = 2$ jedno rješenje ove jednadžbe. Dijeljenjem zadane jednadžbe s 5^x dobivamo

$$(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x = 1.$$

Za $x < 2$ je $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x > (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, a za $x > 2$ je $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x < (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, te osim $x = 2$ jednadžba nema drugih rješenja.

materijal pripremila: S. Varošanec, za potrebe kolegija Metodika nastave matematike, 2011./2012.