LINEARNA ALGEBRA ZA FIZIČARE - popravak prvog kolokvija
27. veljače 2007.

1. **(2/0/-2 boda)** Da li vektori $e_1 - e_2$, $e_2 - e_3$ i $e_3 - e_1$ razapinju $\mathbb{R}^3$? DA NE

   Odgovor: NE.

   Objašnjenje: Vektori nisu linearno nezavisni (suma im je nulvektor). To znači da se pitamo da li vektori $e_1 - e_2$ i $e_2 - e_3$ razapinju $\mathbb{R}^3$. No znamo da dva vektora ne mogu razapinjati trodimenzionalni vektorski prostor (v. teorem 1.7.7 u skripti).
   Rješenje smo mogli dobiti i direktno pomoću matrica, v. skriptu, §1.7.

2. **(2/0/-2 boda)** Da li je $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrica centralne simetrije $x \mapsto -x$ u $\mathbb{R}^3$? DA NE

   Odgovor: DA.

3. **(10 bodova)** Riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

   Rješenje: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1/2, 0) + c(-2, 2, 1)$, $c \in \mathbb{R}$.

4. **(10 bodova)** Izračunajte A^{-1} za

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

   Rješenje: $\begin{bmatrix} 7/2 & -2 & -2 \\ -5/2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. **(5 bodova)** Dokažite da je sustav

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -2 \\ 5x + 9y - 4z = -3 \\ 3x + 4y - 5z = -3 \end{cases}$$

   Cramerov i pomoću Cramerovog pravila izračunajte x.

   Rješenje: Sustav je Cramerov jer je determinanta sustava $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 9 & -4 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$ različita od 0. Izračunamo determinantu u kojoj smo prvi stupac zamijenili koeficijentima s desne strane $D_x = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -3 & 9 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 22$, pa iz Cramerovog pravila slijedi da je $x = \frac{D_x}{D} = \frac{22}{11} = 2$.
   (v. skriptu, §4.4)

6. **(5 bodova)** Koristeći elementarne transformacije na retcima i stupcima izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & 10 \end{vmatrix}.$$

   Rješenje: Vrijednost je -2 (za postupak v. skriptu, §4.3).

7. (5 bodova) Linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ima u kanonskoj bazi matrični zapis

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite njegov matrični zapis u bazi $t_1 = (3, 2), t_2 = (4, 3)$.

Rješenje: Matrični zapis danog operatora u bazi (t_1, t_2) je $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ (objašnjenje potraži u skripti, točke 3.5.6 i 3.5.7).

8. (3 boda) Da li su vektori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni?

Rješenje: Vektori nisu linearno nezavisni ($2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$).

9. (2 boda) Izračunajte predznak permutacije 54321.

Rješenje: Predznak permutacije je $\varepsilon = 1$ (v. skriptu, točke 3.3.14 i 4.6.1).

10. (2/0/-2 boda) Množenje matrica je asocijativno. DA NE

Odgovor: DA.

Objašnjenje: Pogledajte u skripti točku 2.5.7.

11. (2/0/-2 boda) Ako je A kvadratna matrica reda 2, onda je $\det(2A) = 2\det(A)$. DA NE

Odgovor: NE.

Objašnjenje: Ako je A matrica reda n, a λ realan broj, onda je $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ (uzastopce primjenjujemo postupak iz točke 4.3.3). Dakle, ovdje je $\det(2A) = 4\det(A)$.

12. (2/0/-2 boda) Napišite definiciju traga kvadratne matrice.

Odgovor: *Trag* kvadratne $n \times n$ matrice $A = (\alpha_{ij})$ je suma njezinih dijagonalnih elemenata tj. $\mathrm{tr} A = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}$ (v. točku 3.6.1 u skripti).

LINEARNA ALGEBRA ZA FIZIČARE - popravak drugog kolokvija
27. veljače 2007.

1. (2/0/-2 boda) Da li je $W = \left\{ \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \ \eta_1^2 = \eta_2 \right\}$ potprostor od $\mathbb{R}^2$? DA NE

Odgovor: NE.

Objašnjenje: Skup W nije zatvoren na zbrajanje. Primjerice, iako su oba vektora $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ u danom skupu, njihova suma $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ nije.

2. (5 bodova) Odredite dimenziju potprostora u $\mathbb{R}^4$ razapetog vektorima $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Dimenzija je 2 (usp. rješenja druge zadaće i drugog kolokvija).

3. (7 bodova) Odredite bazu za sliku matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Baza za sliku matrice je $\{(1, 0, -1)^\top, (0, 1, 3)^\top\}$ (usp. rješenja druge zadaće i drugog kolokvija).

4. (2/0/-2 boda) Može li rang linearnog operatora $A : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ biti dva puta veći od defekta? DA NE

Odgovor: NE!

Objašnjenje: Pretpostavimo da je $\operatorname{rang} A = 2 \operatorname{defekt} A$. Prema teoremu o rangu i defektu (v. skripta, točka 5.4.6), za linearni operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je $\operatorname{rang} A + \operatorname{defekt} A = n$. Ovdje je $n = 6$ pa mora biti $\operatorname{defekt} A = 2$ i $\operatorname{rang} A = 4$. No, rang ne može biti veći od dimenzije kodomene (ovdje 3)!

5. (6 bodova) Zadani su vektori $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Izračunajte $||2x||^2$ i $(x + y|x - y)$.

Rješenje: $||2x||^2 = 8$ i $(x + y|x - y) = -28$.

6. (2/0/-2 boda) Ako je $|(x|y)| = 12$ i $||x|| \leq 3$, onda je $||y|| \geq 4$. DA NE

Odgovor: DA.

Objašnjenje: Prema Cauchy-Bunjakovskij-Schwarzovoj nejednakosti (v. skriptu, točka 6.3.9) vrijedi $12 = |(x|y)| \leq ||x|| \cdot ||y|| \leq 3||y||$, pa je $||y|| \geq 4$.

7. (5 bodova) Gram-Schmidtovim postupkom ortonormirajte vektore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Dobivamo ortonormiranu bazu $\{v_1, v_2\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ (v. točku 6.5.2 skripte).

8. (2/0/-2 boda) Ako za vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$, onda je $x \perp y$. DA NE

Odgovor: DA.

Objašnjenje: Ovo bismo mogli nazvati "obratom Pitagorinog teorema". Imamo $||x + y||^2 = (x + y|x + y) = (x|x) + (y|x) + (x|y) + (y|y) = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x|y)$, pa je $(x|y) = \frac{1}{2}(||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2) = 0$, tj. $x \perp y$.

9. (6 bodova) Odredite kanonsku jednadžbu pravca koji prolazi točkom $(2,3,0)$ i presijeca ravninu $x+2y-3z=0$ u točki $(1,1,1)$.

Rješenje: Ravnina koja se pojavljuje u zadatku potpuno je nebitna jer je probodište zadano. Tražimo kanonsku jednadžbu pravca u prostoru kroz dvije točke (usp. rješenja druge zadaće i drugog kolokvija). Tražena jednadžba je

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}.$$

10. (5 bodova) Metodom najmanjih kvadrata riješite sistem jednadžbi

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ x-2y=3 \end{cases}$$

Rješenje: $(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-2y=3/2\}=\{(3/2,0)+t(2,1) : t\in\mathbb{R}\}$ (usp. rješenja druge zadaće i drugog kolokvija).

11. (6 bodova) Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Svojstvene vrijednosti su -1 i 1, a pripadni svojstveni vektori su redom $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (usp. rješenje drugog kolokvija).

12. (2/0/-2 boda) Matrica $M=\begin{pmatrix} 1 & -5+i & -1-i \\ 5-i & 3 & 0 \\ 1+i & 0 & 2 \end{pmatrix}$ je hermitska. DA NE

Odgovor: NE.

Objašnjenje: Matrica nije hermitska jer je $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 5+i & 1-i \\ -5-i & 3 & 0 \\ -1+i & 0 & 2 \end{pmatrix}\neq A$ (usp. rješenje drugog kolokvija).