LINEARNA ALGEBRA ZA FIZIČARE - drugi kolokvij (grupa A)
5. veljače 2007.

1. (2/0/-2 boda) Da li je $W = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \ \xi_1 - \xi_2 = 0 \right\}$ potprostor od $\mathbb{R}^2$? DA NE

Odgovor: DA.

Objašnjenje: Skup je zatvoren na zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom, pa mora biti vektorski potprostor (v. točku 5.1.1 u skripti).

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in W,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$x + y = \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \end{pmatrix} \in W \quad \text{jer je} \quad (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2) = (\xi_1 - \xi_2) + (\eta_1 - \eta_2) = 0,$$

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda\xi_1 \\ \lambda\xi_2 \end{pmatrix} \in W \quad \text{jer je} \quad \lambda\xi_1 - \lambda\xi_2 = \lambda(\xi_1 - \xi_2) = 0.$$

2. (5 bodova) Odredite dimenziju potprostora u $\mathbb{R}^4$ razapetog vektorima $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Vektore iz zadatka zapišemo kao stupce matrice. Elementarnim transformacijama na stupcima matrice ne mijenja se potprostor razapet stupcima, pa ni dimenzija tog potprostora (usp. teorem 5.1.13 u skripti).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je dimenzija potprostora razapetog vektorima iz zadatka jednaka 2.
Primjetimo da smo ovdje zapravo računali rang dane matrice, pa smo mogli koristiti elementarne transformacije i na retcima i na stupcima i tako brže doći do rješenja (v. §5.5 u skripti). Na taj način ne bi dobili isti *potprostor* koji razapinju stupci, ali bi *dimenzija* ostala nepromijenjena.

3. (7 bodova) Odredite bazu za jezgru matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Jezgra matrice je skup svih vektora x takvih da je $Ax = 0$, pa sve takve vektore možemo dobiti rješavajući ovaj sustav jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vidimo da matrica A ima jezgru $\ker A = \{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3, x_2 = -3x_3\} = \{(t, -3t, t)^\top : t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, -3, 1)^\top : t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -3, 1)^\top \rangle$ ($^\top$ je oznaka za transponiranje, a ovdje je koristimo isključivo zato što retci zauzimaju manje mjesta od stupaca u tekstu; $\langle S \rangle$ je oznaka za linearnu ljusku skupa vektora S, v. točku 5.1.9 u skripti), pa je baza jezgre dane matrice npr. $\{(1, -3, 1)^\top\}$.

4. (2/0/-2 boda) Ako je rang linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ barem 2, onda je defekt tog operatora najviše 1. DA NE

Odgovor: DA.

Objašnjenje: Prema teoremu o rangu i defektu (v. skripta, točka 5.4.6), za linearni operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je $\operatorname{rang} A + \operatorname{defekt} A = n$. Ovdje je $n = 3$ i $\operatorname{rang} A \geq 2$, pa mora biti $\operatorname{defekt} A \leq 1$.

5. (6 bodova) Zadani su vektori $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Izračunajte $||x||$, $||x+y||$ i $(y|x)$.

Rješenje: Imamo:

$$||x|| = ||\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}|| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$||x+y|| = ||\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}|| = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14},$$

$$(y|x) = (\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-4) = -10.$$

6. (2/0/-2 boda) Ako je $||x|| = 3$ i $||y|| = 4$, onda je $|(x|y)| > 12$. DA NE

Odgovor: NE.

Objašnjenje: Cauchy-Bunjakovskij-Schwarzova nejednakost (v. skripta, točka 6.3.9) nam ovdje daje $|(x|y)| \leq ||x|| \cdot ||y|| = 3 \cdot 4 = 12$. Dakle, nejednakost iz zadatka ne vrijedi ni za koji međusobni položaj vektora x i y. Tako, primjerice, ako su vektori x i y okomiti, imamo $(x|y) = 0$.

7. (5 bodova) Gram-Schmidtovim postupkom ortonormirajte vektore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Postupak je detaljno prikazan u točki 6.5.2 skripte. Koristimo oznake odande:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
v_1 &= \frac{1}{||a_1||} a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
b_2 &= a_2 - \sum_{i=1}^{1} (a_2|v_i) v_i = a_2 - (a_2|v_1) v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\
v_2 &= \frac{1}{||b_2||} b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dobili smo ortonormiranu bazu $\{v_1, v_2\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}$

8. (2/0/-2 boda) Ako za vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $x \perp y$, onda je $||x+y|| = ||x|| + ||y||$.
DA NE

Odgovor: NE.

Objašnjenje: Za primjer možemo uzeti vektore e_1 i e_2 kanonske baze za koje imamo $e_1 \perp e_2$, ali $||e_1 + e_2|| = \sqrt{2} \neq ||e_1|| + ||e_2|| = 2$.
Nije teško pokazati da iz $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ slijedi $(x|y) = ||x|| \cdot ||y||$, što prema točki 6.3.9 (Cauchy-Bunjakovskij-Schwarzova nejednakost) povlači da su vektori x i y linearno zavisni. Budući da je x okomit na y jedina mogućnost je $x = y = 0$ (za ispravno riješen zadatak dovoljan je, naravno, i samo odgovor ne bez prethodnog objašnjenja).

9. (6 bodova) Odredite presjek pravca koji prolazi točkama $(1, 1, 0)$ i $(0, 3, 1)$ i ravnine zadane jednadžbom $x + 2y = 0$.

Rješenje: Pravac je određen jednom točkom i vektorom smjera. Ovdje za točku možemo uzeti bilo koju od dvije dane, npr. $(1, 1, 0)$, a vektor smjera je $\vec{v} = (0, 3, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 2, 1)$. To znači da točka (x, y, z) leži na pravcu ako i samo ako postoji neki $t \in \mathbb{R}$ takav da je $(x, y, z) = (1, 1, 0) + t(-1, 2, 1)$. Tako dobivamo parametarski oblik jednadžbe pravca:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0 + t = t \end{cases}.$$

Tražeći presjek pravca i ravnine, mi zapravo tražimo sve točke koje leže i na pravcu i u ravnini, tj. rješavamo sustav jednadžbi koji se sastoji od jednadžbe pravca i jednadžbe ravnine.

Ovaj sustav je najlakše riješiti tako da parametarski zapisanu jednadžbu pravca uvrstimo u jednadžbu ravnine:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ (1 - t) + 2(1 + 2t) &= 0 \\ 3t + 3 &= 0 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Uvrštavanje ove vrijednosti t u parametarsku jednadžbu pravca daje $x = 2$, $y = -1$ i $z = -1$ pa je traženi presjek jednak $\{(2, -1, -1)\}$.

10. (5 bodova) Metodom najmanjih kvadrata riješite sistem jednadžbi

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Rješenje: Jasno je da sistem iz zadatka nema rješenja, pa je najbolje što možemo odrediti x i y metodom najmanjih kvadrata (usp. primjer 6.6.9 u skripti), tj. tako da minimiziramo $|2x - y - 2|^2 + |2x - y - 1|^2$. Mi zapravo tražimo najbolju aproksimaciju vektora $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorima iz potprostora razapetog s $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Svi takvi vektori su oblika $xa_1 + ya_2$ $(x, y \in \mathbb{R})$, a najbliži je onaj za koji je razlika

$$v = b - (xa_1 + ya_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - (x \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

vektor okomit na dani potprostor. Detaljni dokaz ove tvrdnje pogledajte u skripti §6, točke 6.1 i 6.4. Vektor v mora, dakle, biti okomit na vektore koji razapinju potprostor, tj. na vektore a_1 i a_2. Zapišemo li to preko skalarnog produkta dobivamo sustav koji treba riješiti po x i y:

$$\begin{cases}(v|a_1) = 0\\ (v|a_2) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(b-(xa_1+ya_2)|a_1) = 0\\ (b-(xa_1+ya_2)|a_2) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a_1|a_1)x + (a_2|a_1)y = (b|a_1)\\ (a_1|a_2)x + (a_2|a_2)y = (b|a_2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\ \ 8x - 4y = 6\\ -4x + 2y = -3\end{cases}$$

$$4x - 2y = 3, \qquad \text{pa je } (x,y) \in \left\{\left(0, -\frac{3}{2}\right) + t(1,2) : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

11. (6 bodova) Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

Rješenje: Svojstvene vrijednosti dane matrice dobivamo kao nultočke pripadnog svojstvenog polinoma (vidi skriptu §§8.1,8.2 i kopiju vježbi na web stranici kolegija)

$$\begin{aligned}P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = &\det(\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}) =\\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)+2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2).\end{aligned}$$

Dakle, svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$.
Sada tražimo pripadne svojstvene vektore.
Za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 1$ tražimo sve $v = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ takve da je $Av = \lambda_1 v$. To znači da trebamo riješiti sustav

$$(A - \lambda_1 I)v = 0, \quad \text{što možemo pisati}$$

$$(\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix})\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 0, \quad \text{tj.}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 0$$

Rješenje ovog sustava je očito $v = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\\ t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, što znači da svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 1$ čine jednodimenzionalni potprostor u $\mathbb{R}^2$ sa bazom $\{(1,1)^\top\}$. Možemo uzeti $v_1 = (1,1)^\top$.
Na potpuno isti način dobijemo da svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 2$ čine jednodimenzionalni svojstveni potprostor u $\mathbb{R}^2$ sa bazom $\{(1,2)^\top\}$. Možemo uzeti $v_2 = (1,2)^\top$.

12. (2/0/-2 boda) Matrica $M = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -i\\ 1-i & 3 & 0\\ i & 0 & 2i\end{pmatrix}$ je hermitska. DA NE

Odgovor: NE.

Objašnjenje: Matrica A je hermitska ako vrijedi $A = A^*$, gdje * označava adjungiranje matrice, tj. A^* je dobivena iz A transponiranjem i kompleksnim konjugiranjem svakog matričnog elementa (v. skriptu, točka 8.3.3). Lako se vidi da sve hermitske matrice imaju na dijagonali realne brojeve, pa je očito da matrica M iz zadatka nije hermitska.

LINEARNA ALGEBRA ZA FIZIČARE - drugi kolokvij (grupa B)
5. veljače 2007.

1. (2/0/-2 boda) Da li je $W = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, \xi_1 = 2\xi_2 \right\}$ potprostor od $\mathbb{R}^2$? DA NE

Odgovor: DA.

2. (5 bodova) Odredite dimenziju potprostora u $\mathbb{R}^4$ razapetog vektorima $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Dimenzija danog potprostora je 2.

3. (7 bodova) Odredite bazu za jezgru matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Jedna baza za jezgru dane matrice je $\{(-2, 2, 1)^\top\}$.

4. (2/0/-2 boda) Ako je rang linearnog operatora $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ barem 2, onda je defekt tog operatora najviše 1. DA NE

Odgovor: NE.

5. (6 bodova) Zadani su vektori $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Izračunajte $||y||$, $||x + y||$ i $(x|y)$.

Rješenje: $||y|| = \sqrt{14}$, $||x + y|| = 4\sqrt{2}$, $(x|y) = 2$.

6. (2/0/-2 boda) Ako je $||x|| = ||y|| = 3$, onda je $|(x|y)| \leq 9$. DA NE

Odgovor: DA.

7. (5 bodova) Gram-Schmidtovim postupkom ortonormirajte vektore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Ortonormirana baza: $\{v_1, v_2\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)\}$.

8. (2/0/-2 boda) Ako za vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $x \perp y$, onda je $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. DA NE

Odgovor: DA.

Objašnjenje: To je "Pitagorin poučak", vidi točku 6.4.3 u skripti.

9. (6 bodova) Odredite presjek pravca koji prolazi točkama $(1, 2, 1)$ i $(0, 3, 1)$ i ravnine zadane jednadžbom $x - y - z = 0$.

Rješenje: Presjek je $\{(2, 1, 1)\}$.

10. (5 bodova) Metodom najmanjih kvadrata riješite sistem jednadžbi

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Rješenje: $4x - 2y = 3, \quad (x, y) \in \left\{ \left(0, -\frac{3}{2}\right) + t(1, 2) : t \in \mathbb{R} \right\}$

11. (6 bodova) Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, a pripadni svojstveni vektori su redom $v_1 = (2, -1)^\top$, $v_2 = (1, -1)^\top$.

12. (2/0/-2 boda) Matrica $M = \begin{pmatrix} 2 & 2+i & 4 \\ 2-i & 3i & i \\ 4 & -i & 1 \end{pmatrix}$ je hermitska. DA NE

Odgovor: NE.

LINEARNA ALGEBRA ZA FIZIČARE - drugi kolokvij (grupa C)
5. veljače 2007.

1. (2/0/-2 boda) Da li je $W = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \ \xi_1 = 1 \right\}$ potprostor od $\mathbb{R}^2$? DA NE

Odgovor: NE.

2. (5 bodova) Odredite dimenziju potprostora u $\mathbb{R}^4$ razapetog vektorima $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Dimenzija danog potprostora je 2.

3. (7 bodova) Odredite bazu za jezgru matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Jedna baza za jezgru dane matrice je $\{(3, -2, 1)^\top\}$.

4. (2/0/-2 boda) Ako je rang linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ barem 1, onda je defekt tog operatora najviše 2. DA NE

Odgovor: DA.

5. (6 bodova) Zadani su vektori $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Izračunajte $||x||$, $||y - x||$ i $(y|x)$.

Rješenje: $||x|| = 3\sqrt{2}$, $||y - x|| = \sqrt{22}$ i $(y|x) = 1$.

6. (2/0/-2 boda) Ako je $||x|| = 4$ i $||y|| = 2$, onda je $8 < |(x|y)|$. DA NE

Odgovor: NE.

7. (5 bodova) Gram-Schmidtovim postupkom ortonormirajte vektore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Ortonormirana baza: $\{v_1, v_2\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$.

8. (2/0/-2 boda) Ako za vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $x \perp y$, onda je $||x + y||^2 = (x|x) + (y|y)$. DA NE

Odgovor: DA.

9. (6 bodova) Odredite presjek pravca koji prolazi točkama $(0, 1, 0)$ i $(1, 2, -2)$ i ravnine zadane jednadžbom $x + z = 1$.

Rješenje: Presjek je $\{(-1, 0, 2)\}$.

10. (5 bodova) Metodom najmanjih kvadrata riješite sistem jednadžbi

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Rješenje: $4x - 2y = 3, \quad (x, y) \in \left\{ \left(0, -\frac{3}{2}\right) + t(1, 2) : t \in \mathbb{R} \right\}$

11. (6 bodova) Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje: Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, a pripadni svojstveni vektori su redom $v_1 = (1, 1)^\top$, $v_2 = (2, 1)^\top$.

12. (2/0/-2 boda) Matrica $M = \begin{pmatrix} 5 & i & 1 \\ -i & 2 & 4-i \\ 1 & 4+i & -3 \end{pmatrix}$ je hermitska. DA NE

Odgovor: DA.