LINEARNA ALGEBRA ZA FIZIČARE - prvi kolokvij (grupa A)
28. studenog 2006.

1. (2/0/-2 boda) Da li vektori e_1, $e_2 - e_1$, e_3 i e_4 razapinju $\mathbb{R}^4$? DA NE

Odgovor: DA.

Objašnjenje: Zapišemo vektore kao stupce matrice. Sada elementarnim transformacijama na retcima i stupcima matrice dobivamo matricu kojoj su stupci različiti vektori iz kanonske baze i eventualno nulvektori. Ovdje je dovoljna samo jedna elementarna transformacija - dodavanja prvog stupca drugome:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementarnim transformacijama se ne mijenja linearna nezavisnost ili zavisnost stupaca i to da li stupci razapinju dani prostor. Budući da su stupci druge matrice svi kanonski vektori (e_1, e_2, e_3, e_4), zaključujemo da dani vektori razapinju $\mathbb{R}^4$.

Primjetite da smo u ovako jednostavnom primjeru mogli direktno opaziti da dani vektori razapinju $\mathbb{R}^4$ jer se svaki vektor kanonske baze očito može zapisati kao linearna kombinacija danih vektora, a vektori kanonske baze (kao uostalom i vektori svake druge baze prostora) razapinju taj prostor.

2. (2/0/-2 boda) Matrica

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

je matrica rotacije u $\mathbb{R}^2$ za kut $\pi/4$. DA NE

Odgovor: DA.

Objašnjenje: (v. skriptu, primjer 2.2.6) Rotacija $A = R_\varphi$ oko ishodišta za kut φ je linearno preslikavanje, pa je u potpunosti određeno vektorima (nacrtajte sliku!)

$$a_1 = Ae_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad a_2 = Ae_2 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Matrica rotacije za kut φ je

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Posebno su matrice rotacija za kuteve 0, $\frac{\pi}{2}$, π i $\frac{3\pi}{2}$ redom

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Za $\varphi = \frac{\pi}{4}$ dobivamo upravo matricu iz zadatka.

3. (10 bodova) Riješite sustav

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 8 \end{cases}$$

Rješenje: Gaussovom metodom eliminacije dobivamo rješenje $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. (10 bodova) Izračunajte A^{-1} za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. (5 bodova) Dokažite da je sustav

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - 4z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

Cramerov i nađite rješenje Cramerovim pravilom.

Rješenje: Izračunamo determinantu matrice sustava

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

U gornjem računu smo koristili da se determinanta ne mijenja ako prvi redak pomnožimo s nekim skalarom i dodamo drugom ili trećem retku te da je determinanta trokutaste matrice jednaka umnošku elemenata na dijagonali. Budući da je $D \neq 0$, zaključujemo da je sustav Cramerov, pa možemo koristiti Cramerovo pravilo kako bismo odredili rješenje sustava.

Izračunamo determinante matrica koje se dobiju kad se pojedini stupac matrice sustava zamijeni sa stupcem brojeva koji se nalaze s desne strane jednakostī u zadanom sustavu.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 7, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -5, \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Sada prema Cramerovom pravilu dobivamo da je rješenje sustava

$$(x, y, z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D} \right) = (7, -5, -2).$$

(v. skriptu, §4.4)

6. (5 bodova) Koristeći elementarne transformacije na recima i stupcima izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -3 & 11 \\ 2 & 3 & -5 & 11 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Rješenje: Računamo redom (v. skriptu, §4.3):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -3 & 11 \\ 2 & 3 & -5 & 11 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 11 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3.$$

7. (5 bodova) Linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ima u kanonskoj bazi matrični zapis

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite njegov matrični zapis u bazi $t_1 = (2, -3), t_2 = (-1, 2)$.

Rješenje: Matrica prijelaza iz kanonske baze u bazu (t_1, t_2) je $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, pa je matrični zapis operatora A u bazi (t_1, t_2) (v. skriptu, točka 3.5.6)

$$A_T = T^{-1}AT.$$

Izračunamo T^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right], \qquad \text{pa je} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$A_T = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. (3 boda) Da li su vektori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni?

Rješenje: Zadani vektori su linearno nezavisni jer je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(usp. zad. 1).}$$

9. (2 boda) Izračunajte predznak permutacije 35421.

Rješenje: Permutacija σ zadana nizom 35421 je bijekcija $\sigma : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dana sa $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 2$, $\sigma(5) = 1$ (v. skriptu, točka 3.3.10). Matrica permutacije σ je matrica linearnog operatora T_σ zadanog na kanonskoj bazi sa $T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, $i = 1, \ldots, 5$ (v. skriptu, točka 3.3.14). Dakle, matrica dane permutacije je

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Predznak permutacije je determinanta matrice permutacije (v. skriptu, točka 4.6.1), tj.

$$\varepsilon(\sigma) = \det T_\sigma = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

10. (2/0/-2 boda) Svaka kvadratna matrica ima inverz. DA NE

Odgovor: NE.

Objašnjenje: Kvadratna matrica ima inverz ako i samo ako je punog ranga (tj. ako i samo ako je ekvivalentna jediničnoj matrici, odnosno ako i samo ako joj je determinanta različita od 0). Tako primjerice, nul-matrica nema inverz.

11. (2/0/-2 boda) Za $n \times n$ matrice A i B je $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$. DA NE

Odgovor: NE.

Objašnjenje: Primjerice, ako za $n > 1$ uzmemo $A = B = I$, gdje je I jedinična matrica, imamo $\det(A + B) = \det(2I) = 2^n$, a $\det(A) + \det(B) = 1 + 1 = 2 \neq 2^n$.

12. (2/0/-2 boda) Napišite Binet-Cauchyjev teorem.

Odgovor: *Neka su A i B matrice tipa $n \times n$. Tada je*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

(v. skriptu, točka 4.5.1)

LINEARNA ALGEBRA ZA FIZIČARE - prvi kolokvij (grupa B)
28. studenog 2006.

1. **(10 bodova)** Riješite sustav

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

Rješenje: Gaussovom metodom eliminacije dobivamo rješenje $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. **(2/0/-2 boda)** Da li vektori e_1, $2e_1$, e_3 i e_4 razapinju $\mathbb{R}^4$? DA NE
Odgovor: NE.

3. **(2/0/-2 boda)** Svaka kvadratna matrica nema inverz. DA NE
Odgovor: NE.
Objašnjenje: Sve regularne kvadratne matrice imaju inverz, na primjer jedinična matrica (koja je inverzna samoj sebi).

4. **(10 bodova)** Izračunajte A^{-1} za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

5. **(2 boda)** Izračunajte predznak permutacije 34521.
Rješenje: Predznak dane permutacije je $\varepsilon(\sigma) = -1$.

6. **(5 bodova)** Dokažite da je sustav

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & 4z & = & 1 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Cramerov i nađite rješenje Cramerovim pravilom.
Rješenje: Imamo $D = 1$, $D_x = -2$, $D_y = 1$, $D_z = 0$, pa je

$$(x, y, z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right) = (-2, 1, 0).$$

7. **(5 bodova)** Koristeći elementarne transformacije na recima i stupcima izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -3 & 11 \\ 2 & 3 & -5 & 10 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Rješenje: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -3 & 11 \\ 2 & 3 & -5 & 10 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2.$

8. (2/0/-2 boda) Napišite Binet-Cauchyjev teorem.

Odgovor: *Neka su A i B matrice tipa $n \times n$. Tada je*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

(v. skriptu, točka 4.5.1)

9. (5 bodova) Linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ima u kanonskoj bazi matrični zapis

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Odredite njegov matrični zapis u bazi $t_1 = (2, -3), t_2 = (-1, 2)$.

Rješenje: $A_T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$.

10. (3 boda) Da li su vektori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni?

Odgovor: Zadani vektori su linearno nezavisni.

11. (2/0/-2 boda) Za $n \times n$ matrice A i B je $\det(A + B) = \det(A)\det(B)$. DA NE

Odgovor: NE.

Objašnjenje: Primjerice, ako uzmemo $A = B = I$, gdje je I jedinična matrica, imamo $\det(A + B) = \det(2I) = 2^n$, a $\det(A)\det(B) = 1 \cdot 1 = 1 \neq 2^n$.

12. (2/0/-2 boda) Matrica

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

je matrica rotacije u $\mathbb{R}^2$ za kut $-\pi/4$. DA NE

Odgovor: DA.

LINEARNA ALGEBRA ZA FIZIČARE - prvi kolokvij (grupa C)
28. studenog 2006.

1. **(3 boda)** Da li su vektori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni?

Odgovor: Zadani vektori nisu linearno nezavisni.

2. **(2/0/-2 boda)** Za $n \times n$ matrice A i B je $\det(AB) = -\det(BA)$. DA NE

Odgovor: NE.

Objašnjenje: Primjerice, ako uzmemo $A = B = I$, gdje je I jedinična matrica, imamo $\det(AB) = \det(I \cdot I) = \det(I) = 1$, a $-\det(BA) = -\det(I \cdot I) = -\det(I) = -1 \neq 1$. Primjetite da smo mogli uzeti bilo koje dvije regularne matrice kao kontraprimjer. Naime, tada je $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA) \neq 0$ (ovdje se koristi Binet-Cauchyjev teorem).

3. **(2/0/-2 boda)** Matrica

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

je matrica rotacije u $\mathbb{R}^2$ za kut $\pi/4$. DA NE

Odgovor: NE.

4. **(10 bodova)** Riješite sustav

$$\begin{cases} 4x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \end{cases}$$

Rješenje: Gaussovom metodom eliminacije dobivamo rješenje
$(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. **(2/0/-2 boda)** Nema svaka kvadratna matrica inverz. DA NE

Odgovor: DA.

6. **(10 bodova)** Izračunajte A^{-1} za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

7. **(5 bodova)** Dokažite da je sustav

$$\begin{cases} x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & 4z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \end{cases}$$

Cramerov i nađite rješenje Cramerovim pravilom.

Rješenje: Imamo $D = 1$, $D_x = -2$, $D_y = 2$, $D_z = 1$, pa je

$$(x, y, z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D} \right) = (-2, 2, 1).$$

8. (5 bodova) Koristeći elementarne transformacije na recima i stupcima izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -3 & 11 \\ 2 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Rješenje: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -3 & 11 \\ 2 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1.$

9. (5 bodova) Linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ima u kanonskoj bazi matrični zapis

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odredite njegov matrični zapis u bazi $t_1 = (2, -3), t_2 = (-1, 2)$.

Rješenje: $A_T = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 11 & -7 \end{bmatrix}.$

10. (2 boda) Izračunajte predznak permutacije 35241.

Rješenje: Predznak dane permutacije je $\varepsilon(\sigma) = -1$.

11. (2/0/-2 boda) Da li vektori e_1, e_2, $e_3 - 2e_2$ i e_4 razapinju $\mathbb{R}^4$? DA NE

Odgovor: DA.

12. (2/0/-2 boda) Napišite Binet-Cauchyjev teorem.

Odgovor: *Neka su A i B matrice tipa $n \times n$. Tada je*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

(v. skriptu, točka 4.5.1)